

Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Capítulo 5

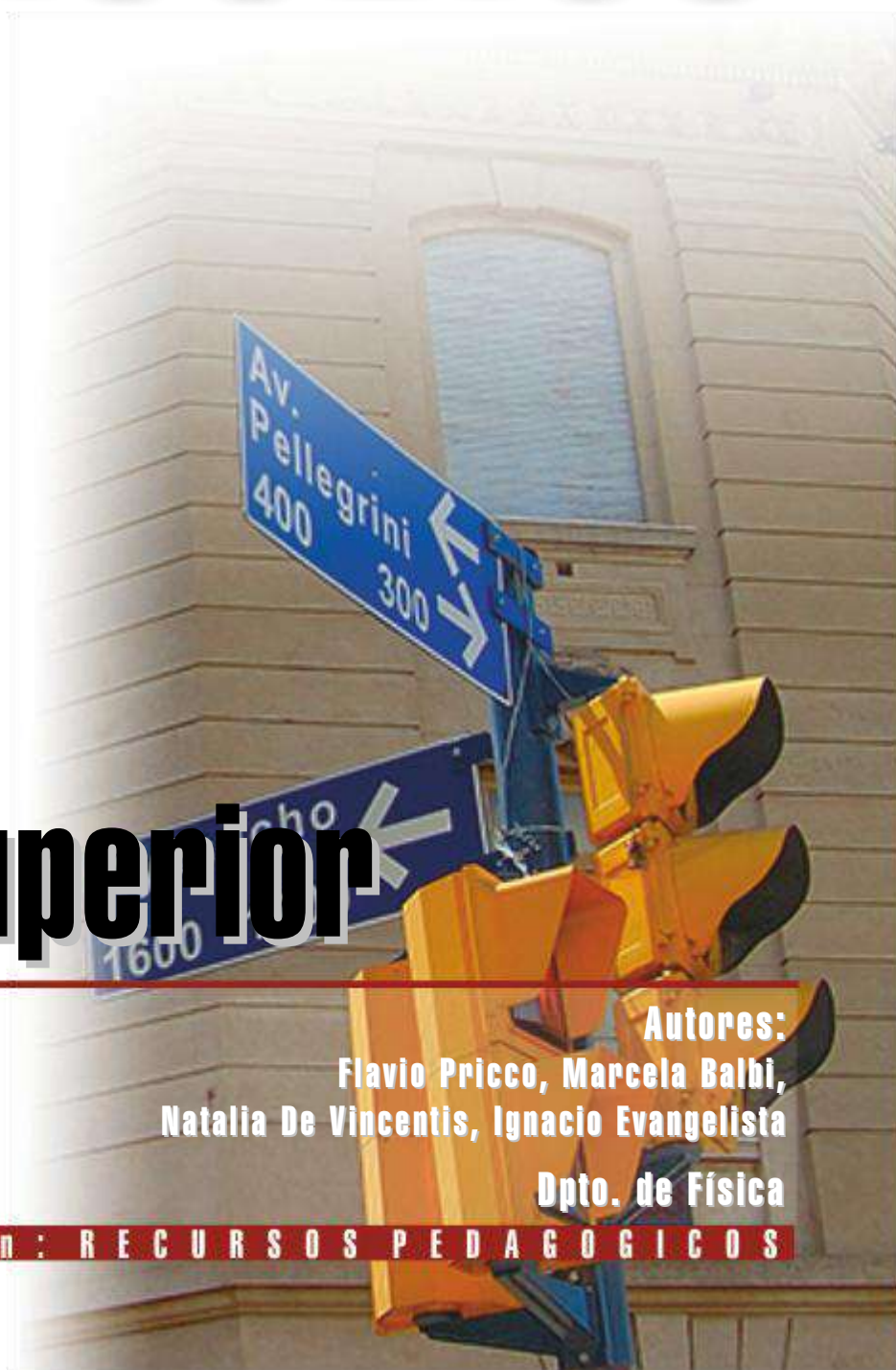
Ingreso

Nivel Superior

Física

Autores:
Flavio Pricco, Marcela Balbi,
Natalia De Vincentis, Ignacio Evangelista
Dpto. de Física

Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS





5.1. Introducción

La aplicación de las leyes de Newton exige conocer el valor de la fuerza en cada instante, es decir conocer $F = F(t)$ para poder hallar la aceleración en función del tiempo, $a = a(t)$. En todos los ejemplos que hemos trabajado hasta ahora sólo consideramos un caso particular en el cual $a = \text{cte}$.

En muchas circunstancias se dispone del valor de la fuerza en función de la posición, es decir $F = F(x)$, como es, por ejemplo, el caso del resorte en que el valor de la fuerza aplicada a él es función de su estiramiento. Estos casos no son tan simples de resolver como los que vimos hasta ahora; por tal motivo, y para desarrollar métodos más generales de resolución de situaciones, introduciremos un grupo de conceptos que ampliarán la forma de aplicar las leyes de Newton. Estos conceptos son los del trabajo y energía y veremos cómo, a través de ellos, adquirimos una visión ampliada de las leyes de Newton.

Es importante destacar que estos conceptos son meramente operatorios; no se incorporan nuevos conceptos físicos que, para este curso, se dan por terminados con las leyes de Newton.

5.2. Trabajo

Como en el caso de peso y masa, la palabra “trabajo” tiene un sentido restringido en el ámbito de la física a diferencia del uso cotidiano. Se llama trabajo en física a una operación que puede realizarse cuando un cuerpo se desplaza y hay fuerzas que intervienen en su movimiento.

Consideremos un cuerpo que experimenta un desplazamiento $\vec{x}$ mientras actúa sobre él una fuerza $\vec{F}$ que forma un ángulo α con el desplazamiento.

Se define el trabajo de la fuerza $\vec{F}$ como el producto del módulo de la fuerza, por el módulo del desplazamiento, por el coseno del ángulo que forma la fuerza con el desplazamiento:

$$W_F = F \cdot x \cos \alpha \quad (5.1)$$

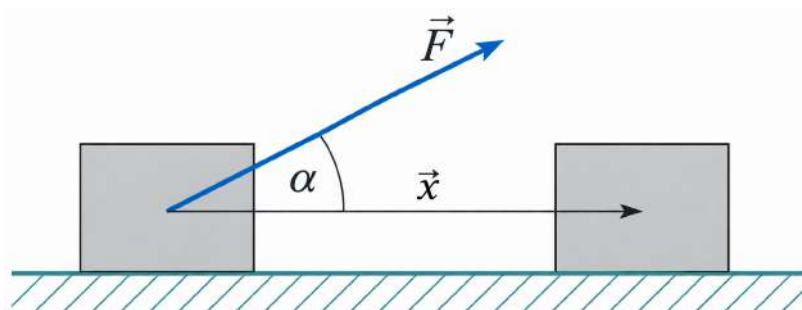


Figura 5.1: Fuerza constante actuando sobre un cuerpo con un ángulo α respecto a la dirección del desplazamiento.

Vemos, por definición, que el trabajo es una magnitud escalar y que su signo depende sólo del $\cos \alpha$.

Cuando consideramos el trabajo de una fuerza, no significa que sea la única que actúa sobre un cuerpo; se puede calcular el trabajo de cada una de las fuerzas que actúa sobre un cuerpo, así como el trabajo de la resultante de todas ellas, según sea el caso:

$$W_{\text{total}} = \sum W_i = W_{\sum \vec{F}} \quad (5.2)$$

■ **Unidad de W en el S.I. (Sistema Internacional):**

$$[W] = [F] \cdot [d] = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ J}$$

■ **Algunos casos particulares:**

- Si el ángulo es 0° (fuerza en la dirección y sentido del desplazamiento):

$$W_F = F \cdot d \cos 0^\circ = F \cdot d$$

- Si el ángulo es 90° (fuerza perpendicular al desplazamiento):

$$W_F = F \cdot d \cos 90^\circ = 0$$

- Si el ángulo es 180° (fuerza en sentido opuesto al desplazamiento):

$$W_F = F \cdot d \cos 180^\circ = -F \cdot d$$

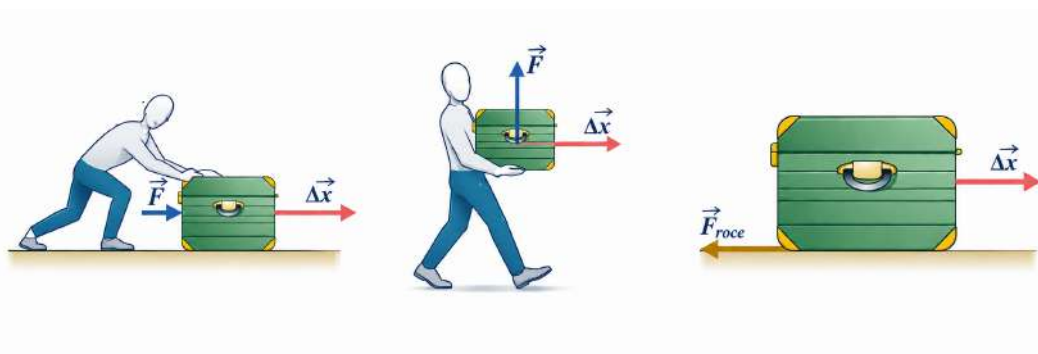


Figura 5.2: Casos particulares del trabajo mecánico de una fuerza constante según el ángulo α con el desplazamiento.

Ejemplo 1

Juan y Pedro mueven cajas idénticas a lo largo de distancias iguales en dirección horizontal. Juan resbala la caja (realiza una fuerza paralela a la dirección de movimiento) en una superficie sin rozamiento. Pedro levanta su caja, la carga la distancia requerida y la baja de nuevo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones



es correcta?

- a) Juan hace menos trabajo que Pedro.
- b) Juan hace más trabajo que Pedro.
- c) Ni Juan ni Pedro hacen trabajo alguno.
- d) Juan y Pedro hacen el mismo trabajo.
- e) Ninguna de las respuestas anteriores.

Resolución:

Respuesta correcta: **b**).

Juan realiza una fuerza horizontal en el mismo sentido del movimiento a lo largo de la superficie sin rozamiento ($\alpha = 0^\circ$):

$$W_{\text{Juan}} = F \cdot d \cos 0^\circ = F \cdot d > 0$$

Pedro, en cambio, primero efectúa trabajo para levantar la caja venciendo a la fuerza peso ($W_{\text{subida}} = mgh$). Luego, durante el transporte horizontal, ejerce una fuerza vertical hacia arriba mientras que el desplazamiento es horizontal ($\alpha = 90^\circ$), por lo que:

$$W_{\text{traslado}} = F \cdot d \cos 90^\circ = 0$$

Finalmente, al descender la caja para apoyarla realiza un trabajo negativo que compensa el de subida ($W_{\text{bajada}} = -mgh$). El trabajo mecánico neto realizado por Pedro sobre la caja a lo largo de todo el proceso resulta:

$$W_{\text{Pedro}} = W_{\text{subida}} + W_{\text{traslado}} + W_{\text{bajada}} = mgh + 0 - mgh = 0$$

Por lo tanto, Juan hace más trabajo mecánico sobre la caja que Pedro.

Ejemplo 2

Un cuerpo de 4 kg de masa se mueve hacia arriba en un plano inclinado de 20° con respecto a la horizontal. Sobre el cuerpo actúan las siguientes fuerzas: una fuerza horizontal de 80 N, una fuerza paralela al plano de 100 N favoreciendo el movimiento, una fuerza de fricción de 10 N que se opone al movimiento. El cuerpo se traslada 20 m a lo largo del plano inclinado. Calcular:

- a) El trabajo de cada fuerza y el trabajo total.
- b) La fuerza resultante y el trabajo de la resultante.

Resolución:

- a) Calculamos el trabajo de cada una de las fuerzas sobre el recorrido $d = 20$ m:

- **Fuerza peso ($\vec{P}$):** El peso actúa verticalmente hacia abajo. Siendo el plano inclinado hacia arriba con un ángulo de 20° , el ángulo entre el vector desplazamiento (paralelo al plano hacia arriba) y el peso es $\alpha = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$:

$$W_P = P \cdot d \cos 110^\circ = m \cdot g \cdot d \cos 110^\circ$$

$$W_P = 4 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ m} \cos 110^\circ \approx -268,1 \text{ J}$$

- **Fuerza normal ($\vec{N}$):** Es ortogonal a la trayectoria sobre el plano inclinado ($\alpha = 90^\circ$):

$$W_N = N \cdot d \cos 90^\circ = 0$$

- **Fuerza paralela al plano ($\vec{F}_1 = 100 \text{ N}$):** Actúa en la misma dirección y sentido del desplazamiento ($\alpha = 0^\circ$):

$$W_{F_1} = F_1 \cdot d \cos 0^\circ = 100 \text{ N} \cdot 20 \text{ m} = 2000 \text{ J}$$

- **Fuerza horizontal ($\vec{F}_2 = 80 \text{ N}$):** Es horizontal y forma un ángulo de $\alpha = 20^\circ$ con la dirección del plano:

$$W_{F_2} = F_2 \cdot d \cos 20^\circ = 80 \text{ N} \cdot 20 \text{ m} \cos 20^\circ \approx 1503,5 \text{ J}$$

- **Fuerza de fricción ($\vec{F}_3 = 10 \text{ N}$):** Tiene sentido opuesto al movimiento ($\alpha = 180^\circ$):

$$W_{F_3} = F_3 \cdot d \cos 180^\circ = -10 \text{ N} \cdot 20 \text{ m} = -200 \text{ J}$$

- **Trabajo total:** Sumando algebraicamente los trabajos de todas las fuerzas actuantes:

$$W_{\text{total}} = W_P + W_N + W_{F_1} + W_{F_2} + W_{F_3}$$

$$W_{\text{total}} = -268,1 \text{ J} + 0 + 2000 \text{ J} + 1503,5 \text{ J} - 200 \text{ J} = 3035,4 \text{ J}$$

- b) Determinación de la fuerza resultante y el trabajo que realiza: Tomando un sistema de ejes donde el eje x es paralelo al plano inclinado (positivo hacia arriba) y el eje y perpendicular a éste:

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{no hay movimiento en la dirección perpendicular al plano})$$

En la dirección del movimiento:

$$\sum F_x = F_1 + F_2 \cos 20^\circ - F_3 - P \sin 20^\circ$$

Reemplazando los valores dados:

$$\sum F_x = 100 \text{ N} + 80 \text{ N} \cos 20^\circ - 10 \text{ N} - 4 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 20^\circ \approx 151,8 \text{ N}$$

Por consiguiente, la fuerza resultante neta a lo largo del plano es $F_{\text{res}} = 151,8 \text{ N}$. El trabajo de dicha resultante a lo largo de $d = 20 \text{ m}$ es:

$$W_{\Sigma F} = F_{\text{res}} \cdot d \cos 0^\circ = 151,8 \text{ N} \cdot 20 \text{ m} = 3035,4 \text{ J}$$

Verificamos que coincide exactamente con el trabajo total: $W_{\text{total}} = W_{\Sigma F}$.



Figura 5.3: Diagrama de fuerzas actuantes sobre el cuerpo en el plano inclinado y diagrama de la fuerza resultante.

5.3. Energía Cinética

Consideremos el caso de un móvil que se desplaza sobre un plano horizontal por la acción de fuerzas tales que la resultante de todas las fuerzas actuantes tenga dirección horizontal. De acuerdo a la Primera Ley de Newton este cuerpo será acelerado, por lo que pasará de una cierta velocidad v_0 en la posición x_0 a la velocidad v en la posición x .

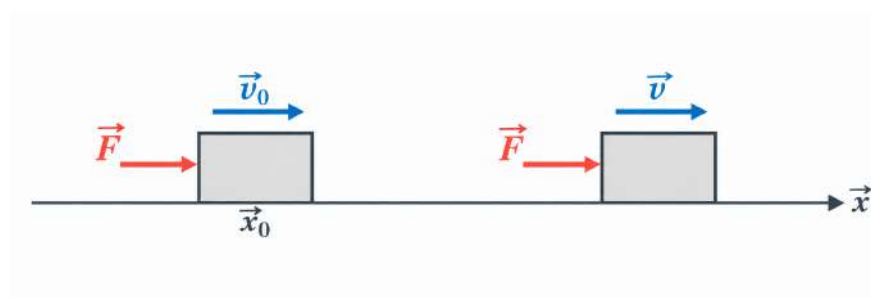


Figura 5.4: Móvil desplazándose sobre un plano horizontal acelerado desde la posición x_0 a la posición x .

Analicemos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:



Figura 5.5: Diagrama de cuerpo libre para el móvil sobre el plano horizontal.

El trabajo de la fuerza resultante es:

$$W_{\text{resultante}} = W_P + W_N + W_F$$

Como W_N (trabajo de la fuerza normal) y W_P (trabajo de la fuerza peso) son ortogonales al movimiento, resulta que el trabajo de la resultante es sólo el de la fuerza $\vec{F}$:

$$W_{\text{resultante}} = W_F = F(x - x_0) \cos 0^\circ = F(x - x_0)$$

Del diagrama de cuerpo libre surge:

$$\sum F_x = F = m \cdot a, \quad \sum F_y = N - P = 0$$

Reemplazando $F = m \cdot a$, el trabajo de la resultante es:

$$W_{\text{resultante}} = m \cdot a(x - x_0) = m \cdot a \cdot \Delta x$$

Reemplazando el valor de aceleración por su equivalente obtenido a partir de la cinemática:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \implies a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta x}$$

El trabajo de la resultante queda:

$$W_{\text{resultante}} = m \cdot a \cdot \Delta x = m \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta x} \right) \Delta x = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E_c - E_{c0} = \Delta E_c$$

Definimos formalmente la **energía cinética**:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.3)$$

Y el **teorema del trabajo y la energía cinética**:

$$W_{\text{resultante}} = \Delta E_c \quad (5.4)$$

Donde con E_c expresamos un nuevo concepto, la energía cinética. Este concepto nos indica que el trabajo de la resultante es igual a la diferencia entre las magnitudes de $\frac{1}{2}mv^2$ evaluadas al final y al comienzo de la trayectoria.



¿Cómo debe entenderse esta relación entre trabajo y energía cinética? Si un cuerpo está en movimiento tiene una cierta energía cinética. Una fuerza externa al realizar trabajo sobre él puede aumentar esa energía cinética, si el trabajo es de signo positivo; o disminuirla, si es de signo negativo. Obsérvese que este resultado tiene en cuenta únicamente los valores inicial y final de la energía cinética; no necesitamos conocer los valores de velocidad a lo largo de la trayectoria.

Al igual que el trabajo, la energía cinética se mide en Joules (J).

Ejemplo 1

Una muchacha de masa 50 kg corre con una velocidad de $3,5 \frac{m}{s}$. ¿Cuál es su energía cinética?

Resolución:

Aplicando la definición de energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \text{ kg} \cdot \left(3,5 \frac{m}{s}\right)^2 = 306,25 \text{ J}$$

Ejemplo 2

Una caja de 4 kg se levanta desde el reposo una distancia de 3 m mediante una fuerza aplicada hacia arriba de 60 N. Determinar:

- a) El trabajo realizado por la fuerza aplicada.
- b) El trabajo realizado por la fuerza peso.
- c) La velocidad final de la caja.

Resolución:

- a) El trabajo realizado por la fuerza aplicada $\vec{F}_{ap}$ ($\alpha = 0^\circ$):

$$W_{ap} = F_{ap} \cdot d \cos 0^\circ = 60 \text{ N} \cdot 3 \text{ m} = 180 \text{ J}$$

- b) El trabajo realizado por la fuerza peso $\vec{P}$ ($\alpha = 180^\circ$):

$$W_p = P \cdot d \cos 180^\circ = -m \cdot g \cdot d = -4 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 3 \text{ m} = -117,6 \text{ J}$$

- c) Para hallar la velocidad final de la caja aplicamos el teorema del trabajo y la energía cinética:

$$W_{total} = \Delta E_c$$
$$W_{ap} + W_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Como la caja parte del reposo ($v_0 = 0$):

$$180\text{ J} - 117,6\text{ J} = \frac{1}{2} \cdot 4\text{ kg} \cdot v^2$$

$$62,4\text{ J} = 2\text{ kg} \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{62,4\text{ J}}{2\text{ kg}}} \approx 5,58 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

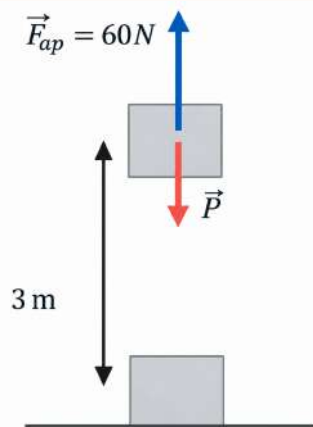


Figura 5.6: Elevación vertical de una caja bajo una fuerza aplicada $\vec{F}_{ap}$ y su propio peso $\vec{P}$.

5.4. Fuerzas Conservativas y No Conservativas

Recordemos un ejemplo del capítulo anterior, el tiro vertical de un proyectil en el vacío. En el instante de partida tiene una velocidad inicial v_0 y en consecuencia una energía cinética inicial $\frac{1}{2}mv_0^2$. Sabemos que a medida que va subiendo su velocidad va disminuyendo; cuando llega a su altura máxima la velocidad es cero y en consecuencia también lo es la energía cinética final. Sobre la base del teorema del trabajo y la energía cinética que vimos en el punto anterior, sabemos que la disminución de la energía cinética se debe a que han obrado fuerzas que han realizado trabajo en contra de la dirección del movimiento frenándolo; esas fuerzas son las gravitatorias (la fuerza peso).

A partir del punto más alto de su recorrido el móvil comienza a descender por la acción de las fuerzas gravitatorias; ahora el camino recorrido y la fuerza peso coinciden, de manera que el trabajo realizado por las fuerzas gravitacionales es positivo. Si sumamos el total del trabajo realizado por las fuerzas gravitacionales en el proceso de ascenso y de descenso el resultado es cero, ya que el módulo de la fuerza es siempre el mismo (el peso del cuerpo), la distancia es la misma de subida que de bajada y lo único que cambia es el valor del ángulo (180° en la subida y 0° en la caída).

Cuando sube:

$$W_{P,\text{sube}} = P(h - h_0) \cos 180^\circ = -mg(h - h_0)$$



Cuando baja:

$$W_{P,baja} = P(h - h_0) \cos 0^\circ = mg(h - h_0)$$

Entonces:

$$W_{P,total} = -mg(h - h_0) + mg(h - h_0) = 0$$

Cuando el cuerpo vuelve a la posición de origen la velocidad de llegada es, en módulo, igual a la de partida, con lo que vemos que toda la energía cinética que se perdió en el punto más alto de la trayectoria se recuperó cuando el cuerpo vuelve al punto de partida. Vemos que en este proceso la energía cinética se ha conservado en el camino de ida y vuelta al punto de partida.

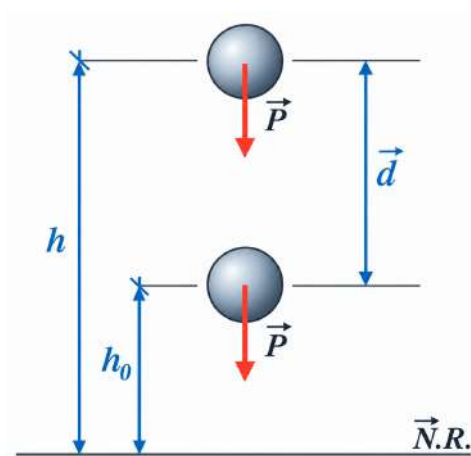


Figura 5.7: Tiro vertical de un proyectil: etapas de ascenso y descenso bajo la acción de la gravedad.

Imaginemos ahora un cuerpo que se puede desplazar sobre un plano inclinado con rozamiento. Desde el punto inferior del plano inclinado lo lanzamos hacia arriba con velocidad v_0 , lo que quiere decir con energía cinética inicial $\frac{1}{2}mv_0^2$. Mientras el cuerpo sube las fuerzas de roce tienen sentido contrario al movimiento y por lo tanto el trabajo de las mismas es negativo. Cuando el cuerpo baja por el plano inclinado el sentido de las fuerzas de roce es hacia arriba, nuevamente contrario al movimiento, siendo el trabajo de las mismas nuevamente negativo. El trabajo total de las fuerzas de roce cuando el cuerpo retorna al punto de partida no es cero. Por otra parte, sabemos de la resolución de problemas anteriores que la velocidad de llegada a la base del plano inclinado no es la misma que la de partida; por lo tanto la energía cinética no se ha conservado en el proceso de ida y vuelta al punto de partida:

$$W_{Fr,sube} = F_r \cdot d \cos 180^\circ = -F_r \cdot d$$

$$W_{Fr,baja} = F_r \cdot d \cos 180^\circ = -F_r \cdot d$$

$$W_{Fr,total} = W_{Fr,sube} + W_{Fr,baja} = -F_r \cdot d - F_r \cdot d = -2F_r \cdot d \neq 0$$

En el primer caso, en que se conserva el valor de la energía cinética al final del recorrido de ida y vuelta, decimos que las fuerzas que han intervenido son **conservativas**;

en cambio en el segundo caso, en que la energía cinética no se ha conservado, aunque también haya sido un proceso de ida y vuelta, decimos que las fuerzas que han intervenido son **no conservativas**.

Las fuerzas gravitacionales son un ejemplo clásico de fuerzas conservativas (pero no las únicas) y las fuerzas de roce lo son de no conservativas. Como en la naturaleza es muy difícil encontrar ejemplos de procesos en los que no existan fuerzas de roce, la gran mayoría de los procesos son no conservativos.

Profundizando más el análisis del cuerpo que se mueve sobre el plano inclinado, obsérvese que cuanto más recorre sobre el plano, mayor será el trabajo de las fuerzas no conservativas. Es que el trabajo de las fuerzas no conservativas o disipativas depende del camino recorrido.

Otra manera de expresar lo mismo y definir a las fuerzas conservativas es:

Una fuerza es conservativa cuando el trabajo hecho por ella al recorrer una trayectoria cerrada es cero.

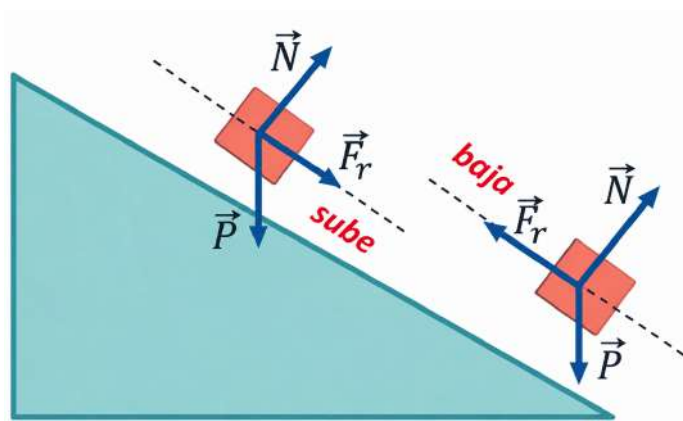


Figura 5.8: Fuerzas que actúan sobre un cuerpo al ascender y descender por un plano inclinado con rozamiento.

Recíprocamente una fuerza es no conservativa cuando:

Una fuerza es no conservativa cuando el trabajo hecho por ella al recorrer una trayectoria cerrada es distinto de cero.

5.5. Energía Potencial

Volvamos a analizar el caso del móvil arrojado hacia arriba con velocidad inicial v_0 . Cuando llega al punto más alto de la trayectoria la velocidad es cero y en consecuencia la energía cinética también, pero cuando vuelve al punto de partida recupera toda su energía. Las preguntas que se nos ocurren son entonces: ¿dónde estuvo?, ¿en qué se transformó la energía cinética?, ¿por qué reaparece luego?

Vamos a asignar a la posición que tiene un móvil una energía de posición de manera que cuanto más alto se encuentre mayor sea esa energía. A esa energía la llamaremos **energía potencial**; así, a medida que la energía cinética va disminuyendo, la potencial va aumentando.



Si con E_p simbolizamos la energía potencial y decimos que el incremento de ésta se hace a costa de la energía cinética, tenemos que toda variación de una es igual a menos la variación de la otra, en símbolos:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

Pero de lo que vimos antes, la variación de energía cinética es igual al trabajo de las fuerzas exteriores:

$$\Delta E_c = W = F\Delta x$$

En nuestro caso $F = -mg$ por tratarse de la fuerza peso que en un sistema de coordenadas convencional aparece negativa, y el desplazamiento del cuerpo podemos expresarlo, por ser vertical, como $\Delta y = y - y_0$, donde y indica la altura máxima alcanzada por el móvil e y_0 la posición de partida.

Reemplazando tenemos:

$$\Delta E_p = -\Delta E_c = -W = -F\Delta y = -(-mg)(y - y_0) = mg(y - y_0)$$

De manera que podremos asignar una energía potencial a cada posición ya que:

$$\Delta E_p = E_p - E_{p0} = mg(y - y_0) = mgy - mgy_0$$

Definimos formalmente la **energía potencial gravitatoria**:

$$E_p = mgy \quad (5.5)$$

El valor de la energía potencial gravitatoria aparece vinculado al sistema de referencia; así, si en el ejemplo anterior aumentamos los valores de y_0 y, naturalmente, de y en igual valor, la energía potencial de la partícula se ve incrementada, pero lo que importa para nuestro trabajo es ΔE_p , que permanece invariable frente a los diferentes sistemas de referencia.

La unidad de E_p en el S.I. (Sistema Internacional) es el Joule (J).

Ejemplo 1

La energía potencial gravitatoria de la esfera de 10 N de la Figura 5.9 es igual a 30 J en los tres casos, porque el trabajo que se efectúa para subirla 3 m es el mismo independientemente del camino recorrido para subirla.

Resolución:

Como la fuerza gravitatoria (peso) es conservativa, el trabajo necesario para elevar la esfera depende únicamente de la diferencia de altura $\Delta y = 3$ m entre la posición final y la inicial, y no de la longitud o forma del camino recorrido:

$$\Delta E_p = P \cdot h = 10 \text{ N} \cdot 3 \text{ m} = 30 \text{ J}$$

Por lo tanto, en los tres caminos mostrados en la Figura 5.9 la energía potencial adquirida por la esfera es idéntica e igual a 30 J.

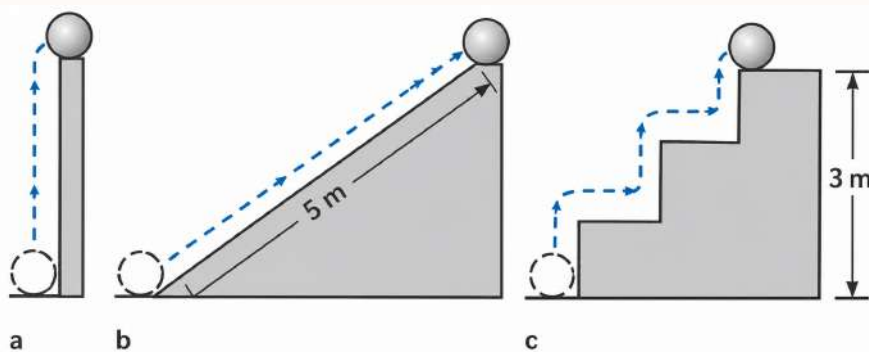


Figura 5.9: Tres caminos distintos para elevar una esfera de 10 N hasta una altura de 3 m.

Ejemplo 2

Un cuerpo de masa m se encuentra a una altura h_1 sobre la superficie de una mesa. La superficie de la mesa se encuentra a una altura h_2 sobre el piso. Una persona dice que la E_{pg} del cuerpo es mgh_1 y otra dice que es $mg(h_1 + h_2)$. ¿Quién tiene razón?

Resolución:

Ambas personas tienen razón.

La energía potencial gravitatoria no tiene un valor absoluto fijado por la naturaleza, sino que depende del nivel o sistema de referencia elegido arbitrariamente como origen de alturas ($y = 0$):

- Si se escoge como nivel de referencia la superficie de la mesa ($y_{\text{mesa}} = 0$), la altura del cuerpo es h_1 , de modo que su energía potencial es $E_{pg} = mgh_1$.
- Si se escoge como nivel de referencia el suelo ($y_{\text{piso}} = 0$), la altura respecto al piso es $h_1 + h_2$, resultando $E_{pg} = mg(h_1 + h_2)$.

En las leyes de la mecánica y en cualquier aplicación física, la magnitud relevante es siempre la variación de energía potencial ΔE_p entre dos estados, la cual es invariable frente a la elección del sistema de referencia.

5.6. Conservación de la Energía de la Partícula

Cuando las fuerzas que actúan sobre una partícula que se mueve desde un punto a otro son conservativas, se encuentra que en todo instante la suma de las energías potencial y cinética de la partícula permanece constante, como lo demostraremos ahora, a partir de:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

Como $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ y $\Delta E_p = mgh - mgh_0$, reemplazando resulta:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -(mgh - mgh_0)$$



$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh + mgh_0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = E_m$$

Definimos el **principio de conservación de la energía mecánica**:

$$E_m = E_c + E_p = \text{cte} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta E_m = 0 \quad (5.6)$$

Con E_m expresamos una nueva magnitud que llamamos **energía mecánica total** y que es constante en todos los sistemas en que sólo actúen fuerzas conservativas. En muchos casos esta ecuación se usa cuando la acción de las fuerzas no conservativas es despreciable frente a la de las fuerzas conservativas; un ejemplo de esto es el de despreciar el rozamiento con el aire en una caída libre.

Otra manera de expresar el hecho de que el sistema se encuentra sometido a fuerzas conservativas es decir que la energía mecánica total de la partícula se conserva, entonces $\Delta E_m = 0$.

5.7. Fuerzas No Conservativas

Consideremos el caso de una partícula que se mueve sometida a la acción de varias fuerzas de distinto tipo: fuerzas conservativas, fuerzas no conservativas y fuerzas de vínculo. La resultante de las fuerzas será la suma vectorial de cada una de ellas:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{vínculo}} + \sum \vec{F}_{\text{cons}} + \sum \vec{F}_{\text{no cons}}$$

En consecuencia, el trabajo de la resultante será igual a la suma de cada uno de los trabajos parciales:

$$W = W_{\text{vínculo}} + W_{\text{cons}} + W_{\text{no cons}}$$

Pero:

- El trabajo de las fuerzas normales ($W_{\text{vínculo}}$) es siempre cero porque son ortogonales a la trayectoria:

$$W_{\text{vínculo}} = 0$$

- El trabajo de las fuerzas conservativas (W_{cons}) es igual a menos la variación de energía potencial:

$$W_{\text{cons}} = -\Delta E_p$$

- El trabajo de la resultante es igual a la variación de la energía cinética:

$$W = \Delta E_c$$

Quedando:

$$\Delta E_c = W_{\text{no cons}} - \Delta E_p$$

De donde:

Enunciamos el teorema general para el trabajo de las fuerzas no conservativas:

$$W_{\text{no cons}} = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_m \quad (5.7)$$

O sea que el trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica. Dicho de otra forma:

$$E_{m,\text{final}} = E_{m,\text{inicial}} + W_{\text{no cons}}$$

Así, evaluando el trabajo de las fuerzas no conservativas podemos obtener la variación de energía mecánica total, o evaluando la variación de energía mecánica podemos obtener el trabajo de las fuerzas no conservativas.

El hecho de que la energía mecánica total no se conserve no significa que no se conserve la energía; lo que ocurre es que las fuerzas no conservativas convierten la energía mecánica en calor, que es otra forma de energía; así, el familiar proceso de fricción para pulir un objeto es seguido de su elevación de temperatura.

5.8. Potencia

Si consideramos el tiempo en que se ha realizado un determinado trabajo, por ejemplo, el trabajo para elevar un bloque de masa m una determinada altura puede realizarse en un segundo o en un año. El valor del trabajo en cada uno de los casos indicados es el mismo, pero a los fines prácticos el resultado puede no ser igual, particularmente en aquellos casos en que interesa el tiempo demorado. Para considerar el tiempo en este proceso definimos **potencia media** como el cociente entre el trabajo realizado y el tiempo empleado en realizar el mismo:

$$P_{\text{med}} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F \Delta x \cos \theta}{\Delta t} = F v_m \cos \theta \quad (5.8)$$

Como $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_m$, resulta:

$$P_{\text{med}} = F \cdot v_m \cos \theta$$

Las unidades en que se expresa son $\frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$, o en el caso del sistema cgs resulta $\frac{1}{\text{s}}$, en este último caso esta unidad carece de nombre particular.

Importa destacar que por razones históricas existen dos unidades de uso práctico que son el caballo vapor (CV) y el horse power (HP) cuyos valores son:

$$1 \text{ CV} = 735 \text{ W}$$

$$1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$$

Ejemplo

Un cuerpo de 4 kg es elevado por una fuerza igual al peso del cuerpo. El cuerpo se mueve hacia arriba con velocidad constante de $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcula la potencia de la



fuerza y el trabajo que realiza la fuerza en 3 s.

Resolución:

Dado que el cuerpo asciende a velocidad constante ($v = \text{cte}$), la aceleración es nula. Por la Primera Ley de Newton, la fuerza aplicada hacia arriba equilibra exactamente al peso del cuerpo:

$$F = P = m \cdot g = 4 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 39,2 \text{ N}$$

La potencia desarrollada por dicha fuerza es:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = F \cdot v = P \cdot v = m \cdot g \cdot v = 4 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 78,4 \text{ W}$$

El trabajo que realiza la fuerza en un lapso de $\Delta t = 3 \text{ s}$ es:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \Rightarrow W = P \cdot \Delta t = 78,4 \text{ W} \cdot 3 \text{ s} = 235,2 \text{ J}$$

Cuestiones

- A ¿El trabajo es siempre una magnitud positiva? Si varias fuerzas actúan sobre una partícula, ¿el trabajo neto realizado por todas ellas es el mismo que el realizado por la resultante?
 - B La energía cinética de un cuerpo, ¿depende del sistema de referencia?
 - C El trabajo neto hecho por la fuerza resultante es siempre igual al cambio de energía cinética. ¿Puede ocurrir que el trabajo realizado por una sola de las fuerzas sea mayor que la variación de energía cinética? Explique.
 - D La fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo no realiza ningún trabajo. ¿Puede el cuerpo estar moviéndose sobre una línea recta? ¿Sobre un círculo? Explique su respuesta en cada caso.
 - E El trabajo necesario para aventar o subir un cuerpo hasta una mesa, ¿depende de lo rápido que se lo suba?
 - F Un individuo rema en un río a contracorriente y se mantiene siempre en el mismo sitio respecto de la orilla. ¿Realiza trabajo? ¿Es, en este caso, igual a la variación de energía cinética? Explique claramente las respuestas.
 - G ¿Quién hace el trabajo: el martillo o el clavo? ¿El tenista o la pelota? ¿La pólvora o la bala? Explique claramente las respuestas.
 - H Especifique si la energía cinética es una magnitud escalar o vectorial.
 - I ¿Cuándo una fuerza es conservativa?
 - J Si usted lleva con su mano su lapicera hasta el suelo y la vuelve a la posición de partida, ¿el trabajo mecánico que se realiza es nulo? Explique la respuesta.
 - K Juan y Pedro mueven cajas idénticas a lo largo de distancias iguales en dirección horizontal. Juan resbala la caja en una superficie sin rozamiento; Pedro levanta su caja, la carga la distancia requerida y la baja de nuevo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
 - a) Juan hace menos trabajo que Pedro.
 - b) Juan hace más trabajo que Pedro.
 - c) Ni Juan ni Pedro hacen trabajo alguno.
 - d) La cantidad del trabajo que hace cada uno depende del tiempo que tomaron.
 - e) Ninguna de las respuestas anteriores.
12. Cuando sostenemos una valija pesada en la mano, aunque estemos en reposo, luego de un rato nos sentimos cansados y hasta con dolor en el brazo, ¿por qué, si no se realiza trabajo? De igual forma, cuando caminamos con la valija



pesada la fuerza que nosotros hacemos es hacia arriba y el camino horizontal; por ser ortogonales el trabajo es cero e igual nos cansamos, ¿por qué? Tampoco hacemos trabajo cuando caminamos por un camino horizontal y después de varias horas también nos cansamos, ¿por qué?

13. La energía potencial de una partícula de masa m cambia en -6 J . Se concluye que el trabajo hecho por la fuerza gravitacional sobre la partícula es:
 - a) 6 J y la partícula aumentó su altura.
 - b) -6 J y la partícula disminuyó su altura.
 - c) 6 J y la partícula disminuyó su altura.
 - d) -6 J y la partícula aumentó su altura.
14. La fricción, ¿es una fuerza conservativa? ¿Por qué?
15. ¿Es el valor de la energía potencial indeterminado? ¿Por qué?
16. Discuta las ventajas y desventajas de resolver problemas mecánicos mediante el método de la energía en comparación con el uso directo de las leyes de Newton.
17. Las carreteras de montaña no van directo a la cumbre sino que la van rodeando de a poco. Explique por qué se hace así.
18. Una variación en la energía mecánica de la partícula, ¿puede siempre explicarse por la aparición o desaparición de energía en algún otro lugar o en otra forma de energía?
19. Los cables de un ascensor lo levantan con velocidad constante; el trabajo total realizado sobre el ascensor, ¿es positivo, negativo o nulo?
20. Un automóvil acelera sobre una carretera horizontal desde una velocidad inicial hasta una final mayor mientras el motor desarrolla una potencia constante. ¿Es mayor la aceleración al comienzo o al final del proceso?

Problemas

1. Una fuerza constante de 10 N actúa en la dirección x sobre una masa de 10 kg. Si la masa parte del reposo en $x = 0$ para $t = 0$, determine la velocidad v y la posición x en función del tiempo empleando los conceptos del trabajo y energía.
2. Se arroja un bloque a lo largo de una superficie horizontal con una velocidad inicial de $10 \frac{m}{s}$. El coeficiente de roce entre el bloque y la superficie es de 0,2. Determine la distancia que recorrerá el bloque antes de detenerse.
3. Se lanza verticalmente un proyectil con una velocidad inicial v_0 . Calcule y grafique la velocidad del proyectil en función de la altura. Indique la altura máxima que alcanza. Resuelva el problema empleando los conceptos de trabajo y energía.
4. Un cuerpo cae por un plano inclinado sin rozamiento, desde 6 m de altura como indica la Figura 5.10. Al llegar al plano horizontal que se encuentra a 2 m sobre el nivel y tiene con él un coeficiente de rozamiento μ desconocido, avanza 7 m hasta detenerse. Si la masa del cuerpo es de 3 kg, determine el valor de μ .

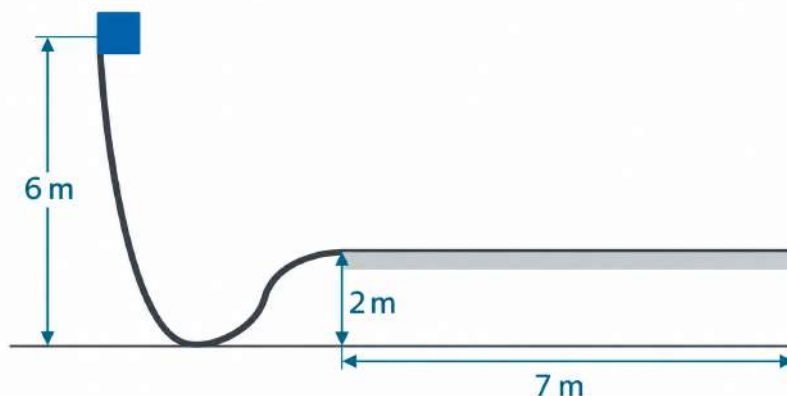


Figura 5.10: Cuerpo que desciende por un plano inclinado sin rozamiento y se desliza por un plano horizontal con rozamiento.

5. Un trineo de 20 kg de masa se desliza colina abajo, empezando a una altura de 20 m. El trineo parte del reposo y tiene una velocidad de $16 \frac{m}{s}$ al llegar al final de la pendiente. Calcule la pérdida de energía debida al frotamiento.
6. Una máquina posee una potencia de 400 HP. ¿Qué trabajo realiza en un minuto? Exprésalo en J y en kWh.
7. Un cable remolcador debe elevar por una pendiente un trineo de 750 kg con 80 pasajeros, cada uno de los cuales tiene una masa de 80 kg. Si el coeficiente de rozamiento entre el trineo y la nieve es de 0,25, la pendiente es de 37° y debe ascender con una velocidad de $8 \frac{km}{h}$, determine la potencia requerida para accionarlo.



Respuestas

1. **Cálculo mediante trabajo y energía:** El trabajo realizado por la fuerza constante $F = 10 \text{ N}$ a lo largo de una posición x partiendo del reposo ($v_0 = 0, x_0 = 0$) es:

$$W = F \cdot x = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Reemplazando los valores $F = 10 \text{ N}$ y $m = 10 \text{ kg}$:

$$10 \text{ N} \cdot x = \frac{1}{2}(10 \text{ kg})v^2 \implies v^2 = 2x \implies v(x) = \sqrt{2x}$$

Dado que la aceleración es constante ($a = \frac{F}{m} = \frac{10 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$), las funciones temporales resultan:

$$v(t) = a \cdot t = (1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot t$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a \cdot t^2 = \frac{1}{2}(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot t^2$$

2. Por el teorema del trabajo de las fuerzas no conservativas:

$$W_{nc} = \Delta E_m \implies -F_r \cdot d = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Como la superficie es horizontal, $N = mg$, y por lo tanto $F_r = \mu mg$:

$$-\mu mgd = -\frac{1}{2}mv_0^2 \implies d = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

Reemplazando los datos:

$$d = \frac{(10 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0,2 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{3,92 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 25,51 \text{ m}$$

3. Por conservación de la energía mecánica (en ausencia de rozamiento con el aire):

$$E_{c0} + E_{p0} = E_c(y) + E_p(y) \implies \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m[v(y)]^2 + mgy$$

Despejando la velocidad en función de la altura:

$$v(y) = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

La altura máxima se alcanza cuando la velocidad instantánea se anula ($v = 0$):

$$0 = v_0^2 - 2gy_{\text{máx}} \implies y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

4. Aplicamos el balance energético entre el punto inicial en lo alto del plano inclinado ($h_1 = 6 \text{ m}$) y el punto final de detención en el tramo horizontal sobreelevado ($h_2 = 2 \text{ m}$, tras recorrer $d = 7 \text{ m}$):

$$W_{nc} = E_{m,\text{final}} - E_{m,\text{inicial}}$$

La única fuerza no conservativa que realiza trabajo es el rozamiento en el tramo horizontal:

$$W_{nc} = -F_r \cdot d = -\mu mgd$$

Las energías mecánicas inicial y final (con $v_i = 0$ y $v_f = 0$) son:

$$E_{m,\text{inicial}} = mgh_1, \quad E_{m,\text{final}} = mgh_2$$

Igualando:

$$-\mu mgd = mgh_2 - mgh_1 = -mg(h_1 - h_2)$$

Simplificando la masa m y la gravedad g :

$$\mu = \frac{h_1 - h_2}{d} = \frac{6 \text{ m} - 2 \text{ m}}{7 \text{ m}} = \frac{4}{7} \approx 0,57$$

5. Tomando la altura de la colina como $h = 20 \text{ m}$: Energía mecánica inicial en la cima (en reposo):

$$E_{mi} = mgh = 20 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ m} = 3920 \text{ J}$$

Energía mecánica final en la base ($v = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $y = 0$):

$$E_{mf} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ kg} \cdot \left(16 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 2560 \text{ J}$$

La pérdida de energía mecánica por frotamiento es:

$$|\Delta E_m| = E_{mi} - E_{mf} = 3920 \text{ J} - 2560 \text{ J} = 1360 \text{ J}$$

6. **Potencia y trabajo:** Sabiendo que $1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$ y $\Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$:

$$P = 400 \cdot 746 \text{ W} = 298\,400 \text{ W}$$

El trabajo realizado en un minuto es:

$$W = P \cdot \Delta t = 298\,400 \text{ W} \cdot 60 \text{ s} = 1,79 \times 10^7 \text{ J} \quad (17,904 \text{ MJ})$$

En kilovatios-hora:

$$W = \frac{17\,904\,000 \text{ J}}{3,6 \times 10^6 \frac{\text{Jh}}{\text{kW}}} \approx 4,97 \text{ kWh}$$

7. **Cálculo de la potencia requerida para el trineo remolcador:**



- Masa total del sistema:

$$M = m_{\text{trineo}} + 80 \cdot m_{\text{pasajero}} = 750 \text{ kg} + 80 \cdot 80 \text{ kg} = 7150 \text{ kg}$$

- Velocidad de ascenso constante:

$$v = 8 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{8}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Fuerza normal perpendicular a la pendiente:

$$N = Mg \cos 37^\circ = 7150 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 37^\circ \approx 55\,960 \text{ N}$$

- Fuerza de rozamiento:

$$F_r = \mu \cdot N = 0,25 \cdot 55\,960 \text{ N} \approx 13\,990 \text{ N}$$

- Componente del peso paralela a la pendiente:

$$P_x = Mg \sin 37^\circ = 7150 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 37^\circ \approx 42\,170 \text{ N}$$

- Fuerza total de tracción del cable a velocidad constante:

$$F_{\text{cable}} = P_x + F_r = 42\,170 \text{ N} + 13\,990 \text{ N} = 56\,160 \text{ N}$$

- Potencia requerida:

$$P = F_{\text{cable}} \cdot v = 56\,160 \text{ N} \cdot 2,22 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 124\,800 \text{ W} = 124,8 \text{ kW} \approx 167,3 \text{ HP}$$