Antes de comenzar, te presentaremos un listado de algunos símbolos, que te serán útiles para el desarrollo de los temas.

SÍMBOLO	***SE LEE***
$\in$	pertenece a
$\notin$	no pertenece a
$\subset$	incluido en
$\not\subset$	no incluido en
$\cap$	intersección
$\cup$	unión
$\emptyset$	conjunto vacío
$\forall$	para todo
$\exists$	existe
$\nexists$	no existe
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$/$	tal que
$\wedge$	y
$\vee$	o
$\neq$	no igual, distinto
$<$	menor
$\leq$	menor o igual
$>$	mayor
$\geq$	mayor o igual
$\therefore$	por lo tanto

LOS NÚMEROS REALES

Es probable que el hombre primitivo, en una primera etapa del desarrollo de su capacidad de abstracción, solo haya advertido la diferencia entre la unidad y la multiplicidad.

Luego, intentando resolver problemas que la naturaleza le planteaba, aprendió a “contar”. Así, en un origen no muy preciso, surgieron los llamados ***números naturales***, al conjunto de los cuales indicamos con N y cuyos elementos escribimos bajo la representación indo-arábiga, es decir:

$$\boldsymbol{N} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \dots\}$$

La necesidad de asignar un número al conjunto vacío dio origen al cero, surgiendo en consecuencia:

$$\boldsymbol{N_0} = \boldsymbol{N} \cup \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \dots\}$$

que es el conjunto de los ***números naturales o el cero.***

Al trabajar en $\boldsymbol{N_0}$ aparecen cuestiones que carecen de solución. Así, dados p y q pertenecientes a $\boldsymbol{N_0}$ no siempre es posible hallar x perteneciente a $\boldsymbol{N_0}$ tal que $x = p - q$ si $p < q$. Para resolver esa situación aparece el conjunto de los ***números enteros*** que simbolizamos con $\boldsymbol{Z}$ y lo indicamos:

$$\boldsymbol{Z} = \{\dots - \mathbf{3}; -\mathbf{2}; -\mathbf{1}; \mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \dots\}$$

Del mismo modo, dados p y q perteneciente a $\boldsymbol{Z}$ y q distinto de 0, no siempre es posible hallar x perteneciente a $\boldsymbol{Z}$ tal que $q \cdot x = p$, lo que surge naturalmente de no poder resolver en $\boldsymbol{Z}$, divisiones del tipo $p : q$ cuando p no es múltiplo de q. Para resolver este problema, se crea el conjunto de los ***números racionales*** que indicamos con $\mathbf{Q}$ y definimos como:

$$\mathbf{Q} = \left\{ x / x = \frac{p}{q} \; con \; p \in \boldsymbol{Z} \wedge q \in \boldsymbol{Z} - \{\mathbf{0}\} \right\}$$

Curiosidad
“**Q**” del inglés “*quotient*” que significa ***cociente.***

Es decir, en $\mathbf{Q}$ están los números que escribimos como “fracción” con numerador en $\boldsymbol{Z}$ y denominador en $\boldsymbol{Z} - \{\mathbf{0}\}$.

Ahora surgen nuevos interrogantes, que, dentro de los conjuntos numéricos definidos hasta el momento, no tiene solución.

Uno de ellos es:

¿Cuál es el número x tal que $x^2 = 2$?

Puede probarse que ningún número de la forma $\frac{p}{q}$ elevado al cuadrado da por resultado 2. Es decir, no existe ningún número dentro de los conjuntos anteriores que resuelva la ecuación planteada.

A partir de tal cuestión y con el objeto de encontrarle solución a este tipo de interrogante, se "crean" números y así surge el nuevo conjunto de los números irracionales:

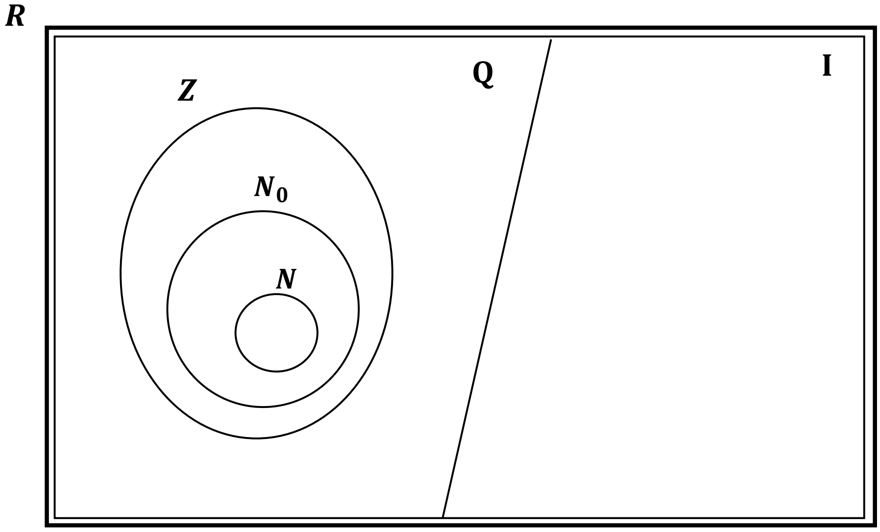
$$\mathbf{I} = \{\boldsymbol{números\ irracionales}\}$$

Entonces, en $\mathbf{I}$ están todos aquellos números que no se pueden escribir en forma de "fracción", como por ejemplo π; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ entre otros.

Finalmente, a partir de los conjuntos anteriores, surge un nuevo conjunto, llamado conjunto de los **números reales**, que se simboliza con $\boldsymbol{R}$ y será nuestro objeto de estudio.

$$\boxed{\boldsymbol{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}}$$

En el siguiente diagrama se muestra la relación entre los conjuntos numéricos $\boldsymbol{R}$; $\mathbf{Q}$; $\mathbf{I}$; $\boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{N_0}$ y $\boldsymbol{N}$.



Observa que:

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{N_0} \subset \boldsymbol{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \boldsymbol{R}$$
$$\mathbf{I} \subset \boldsymbol{R}$$
$$\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$$

Actividad

1) Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justifica tu respuesta.
   a) 0 es un número racional
   b) $R^{+} \cup R^{+} = R$
   c) Todo número real no racional es irracional.
   d) $\frac{8}{2}$ no es natural.
   e) $\frac{a}{a} = 1$
   f) Existen números reales tales que su cuadrado es igual a 12.
   g) $-3{,}5$ es irracional
   h) $x \in \mathrm{Q} \Rightarrow x \in R$
   i) La medida de la diagonal de un rectángulo de lados 3 y 4 es un número racional.
   j) $x \in (\mathrm{I} \cap \mathrm{Q})$

Recordar
- R^{+} representa el conjunto de los números reales positivo.
- R^{-} representa el conjunto de los números reales negativos.

REPRESENTACIÓN EN EJE REAL

Existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta en la que se haya fijado un origen y una unidad de medida, que llamamos eje real.

Es decir, a cada número real le corresponde un punto del eje real y, recíprocamente, a cada punto del eje real le corresponde un número real.
Por ejemplo:

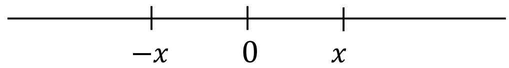
Decimos que a $\sqrt{5}$ le corresponde el punto "b", o que al punto b le corresponde $\sqrt{5}$. Escribimos $b(\sqrt{5})$ y leemos b tiene por **abscisa** $\sqrt{5}$.

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

Llamamos **valor absoluto** de un número real x y simbolizamos $|x|$, a la distancia de ese número al origen en el eje real.
Es decir:

$$x \in \boldsymbol{R}, |x| = d(x; 0)$$

De la definición, podemos concluir que existen dos números cuyas distancias al origen es la misma: **el número y su opuesto**.



Podemos decir que:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Observemos que:
$x \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow |x| \in \boldsymbol{N_0}$

EXPRESIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO REAL

Todo número real tiene una forma decimal de representación que se diferencia según sea un número racional o un número irracional.

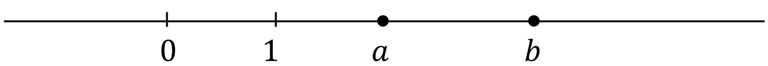
- La expresión decimal de su número racional tiene infinitas cifras decimales "periódicas".
  Por ejemplo:
  - $\frac{4}{3} = 1,33333 \ldots = 1,\hat{3}$
  - $\frac{5}{2} = 2,50000 \ldots = 2,5\hat{0} = 2,5$

- La expresión decimal de un número irracional tiene infinitas cifras decimales "no periódicas".
  Por ejemplo:
  - $\pi = 3,141582 \ldots$
  - $1,23456 \ldots$
  - $-\sqrt{2} = -1,414213 \ldots$

RELACIÓN DE ORDEN

Decimos que un número real es **menor o igual** que otro si el punto representativo del primero en el eje real, se encuentra a la izquierda o coincide con el punto representativo del segundo.

Así:



$a \leq b$ (leemos "a es menor o igual que b")

Naturalmente:

$$a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$$

Actividades

2) Completa con las palabras: **es mayor que** o **es menor que** según corresponda:

- $a > 0 \wedge b > 0 \wedge |a| > |b| \Rightarrow a$ ________________ b

  En palabras:

De dos números positivos, el que tiene mayor valor absoluto ______________ el que tiene menor valor absoluto.

- $a < 0 \wedge b > 0 \wedge |a| > |b| \Rightarrow a$ ________________ b

  En palabras:

De dos números negativos, el que tiene mayor valor absoluto ______________ el que tiene menor valor absoluto.

3) Determina cuál es el signo ($<$; $>$ ó $=$) que corresponde colocar entre los siguientes pares de números:

   a) $|-8|$ _____ $|3|$
   b) $|8|$ _____ $|-3|$
   c) (-12) _____ (-11)
   d) 2 _____ $|-3|$
   e) $|2{,}5|$ _____ $|-2{,}5|$
   f) $|-2|$ _____ $|-4|$

4) Representa, en sucesivos ejes reales, el conjunto de valores de la variable que hace cierta cada proposición:

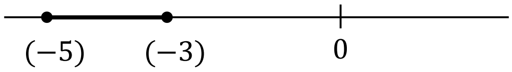
   a) $x < (-2)$
   b) $x \geq (-2)$
   c) $x \geq \frac{2}{3}$
   d) $x < 0$
   e) $(-1) < x < 1$
   f) $(-2) \leq x \leq \frac{3}{2}$
   g) $(-1{,}5) \leq x < (-0{,}5)$

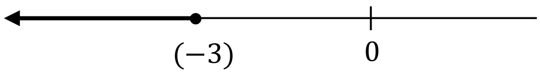
Observación:

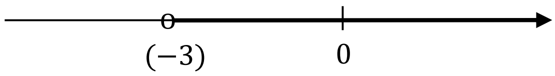
- La expresión $a < x < b$, significa que el número x es menor que b y mayor que a.
- La expresión $a \leq x \leq b$, significa que el número x es menor o igual que b y mayor o igual que a.

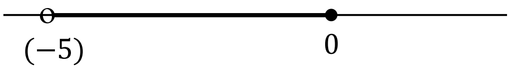
5) Escribe utilizando desigualdades, el conjunto de números representado en cada eje:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

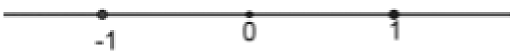
6) Representa en el eje real posibles números a, b, y c que verifiquen las condiciones indicadas en cada caso:

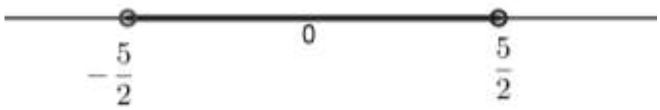
a) $a \ngtr b$ y $c > b$ b) $c > a$ y $a \leq b$ c) $0 < a \leq b$ y $c < 0$

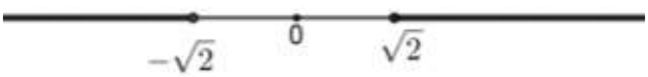
7) Escribe cada una de las siguientes expresiones en términos de distancia y representa en el eje real los números x que la verifican:

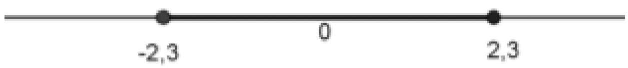
a) $|x| = \frac{3}{2}$
b) $|x| \leq 2$
c) $|x| < 2{,}5$
d) $|x| \geq \frac{3}{2}$
e) $|x| > 0$
f) $|x| > \frac{9}{4}$
g) $|x| \leq 0$
h) $|x| \geq 3 \wedge |x| \neq 4$
i) $x \in Z \wedge |x| < 5$
j) $x \in Z \wedge 2 < |x| \leq 5$

8) Empleando la simbología de valor absoluto escribe la igualdad o la desigualdad que verifican los números x representados en cada eje real:

a) 

b) 

c) 

d) 

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON LOS NÚMEROS REALES

➔ Suma y multiplicación

En $\mathbb{R}$, la suma y la multiplicación gozan de las siguientes propiedades:

$\forall a; b; c \in R$:

SUMA

- Ley de cierre: $(a+b) \in R$
- Conmutativa: $a+b=b+a$
- Asociativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$
- Existencia del elemento neutro:

$$a+0=0+a=a$$

- Existencia del opuesto:

$$\forall a, \exists\, b / a+b=0$$

b es el **opuesto** de a y se simboliza:

$$b=-a$$

MULTIPLICACIÓN

- Ley de cierre: $(a \cdot b) \in R$
- Conmutativa: $a \cdot b=b \cdot a$
- Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot(b \cdot c)$
- Existencia del elemento neutro

$$a \cdot 1=1 \cdot a=a$$

- Existencia del recíproco:

$$\forall a \neq 0, \exists\, b / a \cdot b=1$$

b es el **recíproco** de a y se simboliza:

$$b=\frac{1}{a}$$

Distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

Transforma multiplicaciones en sumas

$$a \cdot(b+c)=a \cdot b+a \cdot c$$

Transforma sumas en multiplicaciones (Factoreo)

Propiedades importantes del opuesto y recíproco de números reales

En $\mathbb{R}$, el opuesto y recíproco de un número gozan de las siguientes propiedades:

$\forall a; b \in R$:

- $(-a)=(-1) \cdot a$
- $-(-a)=a$
- $-(a+b)=(-a)+(-b)$
- $(-a) \cdot(-b)=a \cdot b$
- $(-a) \cdot b=a \cdot(-b)=-(a \cdot b)$
- $\frac{1}{\frac{1}{a}}=a$ con $a \neq 0$
- $\frac{1}{a \cdot b}=\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

➔ **Resta**
Definición:

$$\forall a; b; c \in R: a - b = c \Leftrightarrow b + c = a$$

Algoritmo de la resta:

$$a - b = a + (-b)$$

Ejemplo: $7 - (-3) = 7 + 3 = 10$

➔ **División**
Definición:

$$\forall a; b \in R; b \neq 0: a: b = c \Leftrightarrow b \cdot c = a$$

Algoritmo de la división:

$$a: b = a \cdot \frac{1}{b} \quad \text{con } b \neq 0$$

Ejemplo: $3: \frac{5}{4} = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$

Actividades

9) Indica en cada caso si la igualdad dada es correcta o incorrecta.
   a) $6 + 4: 2 = (6 + 4): 2$
   b) $6: 2 + 4: 2 == (6 + 4): 2$
   c) $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$

10) Te informan que $a \cdot b = a$. ¿Cuáles son los valores posibles de a y de b?

11) Si $a \cdot b = 0$, $a + b = 8$ y $b \neq 0$. Calcula a y b.

➔ **Potenciación**

Es importante notar que la potenciación expresa una multiplicación de factores iguales.

Por ejemplo, productos del tipo:

$$5 \cdot 5 \cdot 5;\ 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3;\ 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$$

se expresan respectivamente:

$$5^3;\ 3^4;\ 0^5$$

en los que suele llamarse **base** al factor que se multiplica reiteradamente y **exponente** al número de veces que se multiplica ese factor. Sin embargo, es necesario plantear una definición que involucre todas las situaciones que pueden darse cuando la base es un número real cualquiera y el exponente un entero cualquiera.

$$a^n = \begin{cases} \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}^{n\ factores} & si \quad n \in \mathrm{N}; n > 1 \\ a & si \quad n = 1 \\ 1 & si \quad n = 0; a \neq 0 \\ \dfrac{1}{a^{-n}} & si \quad n < 0; n \in \mathrm{Z}; a \neq 0 \end{cases}$$

Son ejemplos de potencias:

- $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$
- $\left(-\sqrt{2}\right)^0 = 1$
- $1^{40} = 1$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{125}} = \frac{125}{27}$

Observemos que $\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27}$; por lo tanto: $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$.

Se puede demostrar que, si $a \neq 0$: $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

Propiedades de la potenciación

- Propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación:
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
- Propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación:
$$(a : b)^n = a^n : b^n ; b \neq 0$$
- Producto de potencias de igual base:
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
- Cociente de potencias de igual base:
$$a^n : a^m = a^{n-m} ; a \neq 0$$
- Potencia de otra potencia:
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplo:

Aplicando propiedades resuelve hasta llegar a la mínima expresión.

$$\frac{\left[\left(h^2\right)^5 \cdot m^4\right]^{-2} \cdot h^{12}}{m^{-10}} \overset{(1)}{\cong} \frac{\left[h^{10} \cdot m^4\right]^{-2} \cdot h^{12}}{m^{-10}} \overset{(2)}{\cong} \frac{\left(h^{10}\right)^{-2} \cdot \left(m^4\right)^{-2} \cdot h^{12}}{m^{-10}} \overset{(1)}{\cong} \frac{h^{-20} \cdot m^{-8} \cdot h^{12}}{m^{-10}} \overset{(3)}{\cong}$$

$$\overset{(3)}{\cong} h^{-20} \cdot m^{-8} \cdot h^{12} \cdot m^{10} \overset{(4)}{\cong} h^{-20+12} \cdot m^{-8+10} = h^{-8} \cdot m^2$$

(1) Potencia de otra potencia
(2) Propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación.
(3) $\frac{1}{a^{-n}} = a^n ; a \neq 0$
(4) Producto de potencias de igual base

Actividades

12) Resuelve hasta llegar a la mínima expresión:

a) $\left(y^4\right)^{-3}.y^{23}.\left[\left(y^4\right)^5\right]^{-2} =$

b) $\dfrac{m^{-12}}{m^5} : \left(m^4\right)^{-5} =$

c) $\dfrac{\left(b^6 : b^4\right)^{12}}{b^{40}.\left(b^8\right)^{-7}}.b^{100} =$

d) $\left(a^{-3}b^{12}c^{-11}\right)^{-10}.\left(a^{-4}\right)^{-5} =$

e) $\dfrac{x^{12}y^4}{xy^{-8}} =$

f) $\left[\left(a^4b\right)^7 : b^{-6}\right]^2 : a =$

g) $\dfrac{\left(a^{-3}\right)^{-12}b^9}{b^5}.a^{-36} =$

h) $\dfrac{\left[x^4.\left(x^6y^9\right)^3\right]^{-1}}{y^3 : y^{-2}} =$

i) $\dfrac{\left[\left(m^{-2}\right)^4 h^6\right]^2 \left(h^{-8}y^9\right)^{-1}}{m^4y^{-5}} =$

j) $\left(\dfrac{x^{-8}}{y^4.y^5}\right)^{-1}.\left(\dfrac{y^{10}}{x^{-5}}\right)^2 =$

13) Calcula expresando el resultado en la forma que muestra el ejemplo.

Ejemplo: $\dfrac{3^3b^{20}c}{a^5b^3c^2} = 3^3a^{-5}b^{-1}c^{-1}$

a) $\dfrac{2^0}{\left(2^{-2}x^2y^{-2}\right)^3} =$

b) $\dfrac{3m^4x^{-2}}{9^2\left(m^{-2}\right)^2\left(x^{-1}\right)^2}$

c) $\dfrac{\left(m^0\right)^3 3^5c^5}{m^2(-3)^0\left(c^2\right)^3} =$

d) $\left\{\left[\left(a^{-1}b^{-2}\right) : \left(a^{-1}b\right)\right]^2 : \left(a^{-1}b^0\right)\right\}^{-2} =$

14) Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\left[\dfrac{\left(a^{-2}b^{-3}\right)^2 : \left(a^{-1}b^{-2}\right)}{a^3b^4}\right] : \left(a^{-2}b\right) =$

b) $\left(\dfrac{x^{-2}y}{3} + \dfrac{1}{x^2y^{-1}}\right).\left(x^{-2}y\right)^{-1} =$

15) Establece la veracidad o falsedad de cada enunciado justificando tu respuesta.

a) $(-x)^2 = -x^2$

b) $-x^2 > 0$; cualquiera sea x

c) $x^3 > (-x)^3 \; si \; x > 0$

d) $x^3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$

➔ Radicación

Ya hemos visto el significado de la expresión $a = b^n$ para distintos valores de b y n. A partir de esto, introducimos un nuevo concepto que llamamos **radicación**, en el que también debemos considerar las diversas situaciones según los valores de a; b y n.

Se define:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ con } n \in N \wedge n > 1}$$

> ***Para tener en cuenta:***
> $\boldsymbol{a}$ se llama **radicando**
> $\boldsymbol{n}$ se llama **índice** y siempre es un número natural distinto de 1

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{-27} = -3$ pues $(-3)^3 = -27$
- $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$ pues $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
- $\sqrt[4]{16} = 2$ o $\sqrt[4]{16} = -2$ pues $2^4 = (-2)^4 = 16$
- $\sqrt{-9}$ no tiene solución en R porque no existe $x \in R$ tal que $x^2 = -9$

Observemos que:

- Si n es par y $a \geq 0$ existen dos posibles b reales.
- Si n es par y $a < 0$ no existe b real.
- Si n impar siempre existe un b real.

O sea, si $a \geq 0$, siempre existe $\sqrt[n]{a}$, y si < 0, existe sólo si n es impar.

Actividad

16) Indica qué valores debe asumir la variable para que cada una de las expresiones dadas quede definida en el conjunto de los números reales:

a) $\sqrt{\frac{1}{x-4}}$

b) $\sqrt[5]{xy}$

c) $\sqrt{xy}$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{xy^2}}$

e) $\sqrt{\frac{x-2}{3}}$

f) $\sqrt{\frac{-3}{x}}$

En los cálculos numéricos se conviene que cuando la raíz tiene un índice par, el radicando debe ser no negativo, y de sus dos posibles soluciones sólo se considera la positiva. A estos radicales se los llama **radicales aritméticos**.

Así,

- $\sqrt[3]{-8}+\sqrt{25}=-2+5=3$
- $\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{-27}=2+(-3)=-1$

Propiedades de la radicación

Para que las propiedades que estudiaremos sean válidas en R, es necesario que los radicales tengan solución y sea única, por lo que si el índice es par, sólo consideraremos radicales aritméticos.

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
- Raíz de otra raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$
- Propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación:

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

- Propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; b \neq 0$$

Actividades

17) Resuelve aplicando la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación y/o división.

Ejemplos:

- $\sqrt[6]{2x}\,.\sqrt[6]{16x^4}\,.\sqrt[6]{2a^6x} = \sqrt[6]{2x\,.16x^4\,.2a^6x} = \sqrt[6]{(2.16.2).a^6.(x.x^4.x)} =$
$$=\sqrt[6]{64.a^6x^6} = \sqrt[6]{64}.\sqrt[6]{a^6}.\sqrt[6]{x^6} = 2ax$$

- $\dfrac{\sqrt[3]{81.a^5.b}}{\sqrt[3]{3.a^{-1}}} = \sqrt[3]{\dfrac{81.a^5.b}{3.a^{-1}}} = \sqrt[3]{\dfrac{81}{3}.\dfrac{a^5}{a^{-1}}b} = \sqrt[3]{27a^6b} = \sqrt[3]{27}.\sqrt[3]{a^6}.\sqrt[3]{b} = 3a^2\sqrt[3]{b}$

a) $\sqrt{2}.\sqrt{3m}.\sqrt{6m}=$

b) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}a^3b^9}.\sqrt[5]{-4a^2}.\sqrt[5]{16b^{-4}}=$

c) $\dfrac{\sqrt[7]{12y^{11}q^3}:\sqrt[7]{3yq^{-6}}}{\sqrt[7]{y^3q^2}}=$

d) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{32}\right)\sqrt{2}=$

18) Extrae todos los factores posibles del radical.
Ejemplos:

- $\sqrt{108}=\sqrt{2^2.3^3}=\sqrt{2^2.3^2.3}=\sqrt{2^2}.\sqrt{3^2}.\sqrt{3}=2.3.\sqrt{3}=6\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{24m^3x^8}=\sqrt[3]{2^3.3.m^3.x^6.x^2}=\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{m^3}.\sqrt[3]{\left(x^2\right)^3}.\sqrt[3]{x^2}=2.\sqrt[3]{3}.m.x^2\sqrt[3]{x^2}=$

$=2mx^2.\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{x^2}=2mx^2\sqrt[3]{3x^2}$

a) $\sqrt{4x^2y^4w}=$

b) $\sqrt[3]{40a^3b^5c^{10}}=$

c) $\sqrt[5]{h^4m^{12}z^{20}}=$

d) $\sqrt{9.(a+b)^3}=$

19) Resuelve las siguientes sumas algebraicas.
Ejemplos:

- $3\sqrt{2}-7\sqrt{2}+\sqrt{2}=(3-7+1)\sqrt{2}=-3\sqrt{2}$
- $5\sqrt{12}-3\sqrt{75}+4\sqrt{3}=5\sqrt{2^2.3}-3\sqrt{5^2.3}+4\sqrt{3}=$

$=5.2\sqrt{3}-3.5\sqrt{3}+4\sqrt{3}=$

$=(10-15+4)\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

Para reducir términos los radicales deben ser **semejantes**. Dos radicales son semejantes si tienen igual índice e igual radicando.

a) $\sqrt[3]{16}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}=$

b) $2\sqrt{54}-\sqrt{24}+2\sqrt{18}-5\sqrt{6}=$

c) $\sqrt{45}-\sqrt{20}-\sqrt{80}+\sqrt{180}=$

d) $\sqrt{a^3}+a\sqrt{16a}-a^{-1}\sqrt{a^5}=$

Racionalización de denominadores

Racionalizar un denominador es encontrar una expresión equivalente a la dada sin radicales en el denominador.

➢ Caso 1: Hay un solo término en el denominador
Ejemplos:

- $\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$
- $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2a^2}}=\dfrac{4}{\sqrt[3]{2a^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{2^2a}}{\sqrt[3]{2^2a}}=\dfrac{4.\sqrt[3]{2^2a}}{\sqrt[3]{2^3a^3}}=\dfrac{2.\sqrt[3]{4a}}{a}$

- Caso 2: Hay un binomio con al menos una raíz cuadrada en el denominador

Ejemplos:

- $\frac{6}{\sqrt{5}+1}=\frac{6}{(\sqrt{5}+1)}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}-1)}=\frac{6(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{6(\sqrt{5}-1)}{4}=\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$
- $\frac{4a}{\sqrt{3a}-\sqrt{a}}=\frac{4a(\sqrt{3a}+\sqrt{a})}{(\sqrt{3a}-\sqrt{a})(\sqrt{3a}+\sqrt{a})}=\frac{4a.(\sqrt{3a}+\sqrt{a})}{(\sqrt{3a})^2-(\sqrt{a})^2}=$

$$=\frac{4a.(\sqrt{3a}+\sqrt{a})}{3a-a}=\frac{4a.(\sqrt{3a}+\sqrt{a})}{2a}=2(\sqrt{3a}+\sqrt{a})$$

Recuerda que:
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Actividades

20) Racionaliza los denominadores de las siguientes expresiones:

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}=$

b) $\frac{2m}{\sqrt[4]{m^3}}=$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{b^5}}}=$

d) $\frac{3ab}{\sqrt[7]{a^3b^6}}=$

e) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=$

f) $\frac{6}{\sqrt{7}+2}=$

g) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=$

h) $\frac{h-m}{\sqrt{h}+\sqrt{m}}=$

21) Verifica las siguientes igualdades:

a) $6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\frac{3}{4}\sqrt{2}=\frac{7}{4}\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{27b^3y^6a}=3by^2\sqrt[3]{a}$

c) $\frac{\sqrt{\left(1+\frac{5}{4}\right)a}\ \sqrt{169-144}}{\sqrt{a}}=\frac{15}{2}$

d) $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{98}=12\sqrt{2}$

e) $\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}=1-2x$

g) $\frac{11}{2\sqrt{5}-3}=2\sqrt{5}+3$

h) $\frac{\sqrt{8}\sqrt{2}}{\sqrt{a}\sqrt{a^2}}=\frac{4\sqrt{a}}{a^2}$

i) $\sqrt{250}-\sqrt{50}+\sqrt{450}=5\sqrt{10}+10\sqrt{2}$

j) $\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

k) $\sqrt[7]{0{,}001.b^2}\ \sqrt[7]{\frac{1}{10000}.b^5}=\frac{b}{10}$

➔ Potenciación de exponente racional

Se define:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ si } n \in N; n > 1 \text{ y } m \in Z \wedge a \neq 0$$

Ejemplos:

- $(-32)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(-32)^2}$
- $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{8}\right)^{-1}}$
- $(25)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3}$

Las propiedades de la potenciación enunciadas anteriormente son válidas para la potenciación de exponente racional.

Actividades

22) Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a) $\dfrac{a^{\frac{4}{5}} : \sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[4]{a^{-1}}} = a^{\frac{13}{20}}$

b) $\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{5}} . \sqrt[3]{a^2} : a^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{31}{60}}$

c) $\left[\dfrac{25x^{-2}y^{\frac{1}{3}}}{64\left(x^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{8}\sqrt[6]{x^{-4}y}$

d) $\left[\dfrac{x^{3a-2}}{x^{2a-1}}\right]^{\frac{1}{a-3}} = x$

e) $\left[\dfrac{y^{b+2x}}{y^{2x}}\right]^{\frac{b+c}{b}} : y^{b+c} = 1$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{a^{\frac{2}{5}}\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}}{\sqrt{a^{-1}}} = a^{\frac{19}{30}}b^{\frac{2}{9}}$

23) En cada uno de los siguientes casos calcula valores de x, y, z que verifiquen la igualdad:

a) $\sqrt{\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{3\sqrt{b}}} = 3^x a^y b^z$

b) $\sqrt[5]{ab^2}\sqrt{c} = a^x b^y c^z$

c) $\dfrac{\sqrt{2b^3}\sqrt[5]{b}}{\sqrt[4]{a^3}} = 2^x a^y b^z$

d) $(63a)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{28a} = 5^x 7^y a^z$

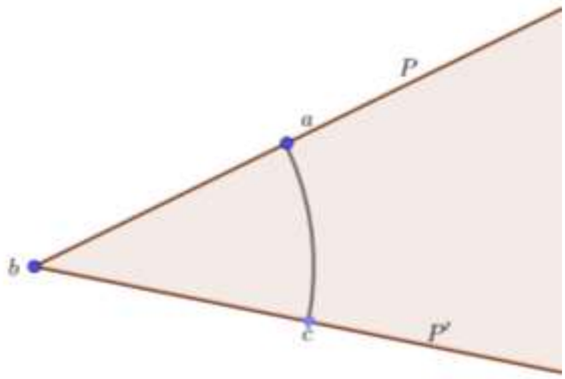
TRIGONOMETRIA

ÁNGULO PLANO

Ángulo plano convexo

Llamamos ***ángulo plano convexo*** de vértice b y se lo simboliza $\widehat{abc}$ al conjunto de puntos del plano barridos por la semirrecta $\overrightarrow{ba}$ al pasar de una posición inicial P a una posición final P', describiendo el punto "a" un arco de circunferencia "menor o igual" que una semicircunferencia o igual a una circunferencia.

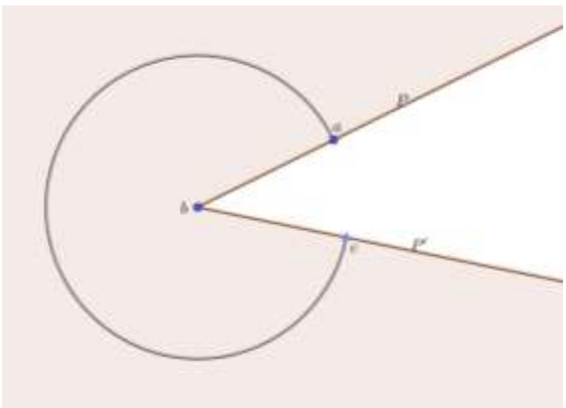
La siguiente figura muestra un ejemplo de un ángulo plano convexo:



Ángulo plano cóncavo

Llamamos ***ángulo plano cóncavo (o no convexo)*** y se lo simboliza $\widehat{abc}_{cóncavo}$ al conjunto de puntos del plano barridos por la semirrecta $\overrightarrow{ba}$ al pasar de una posición inicial P a una posición final P', describiendo el punto "a" un arco de circunferencia mayor que una semicircunferencia y menor que una circunferencia.

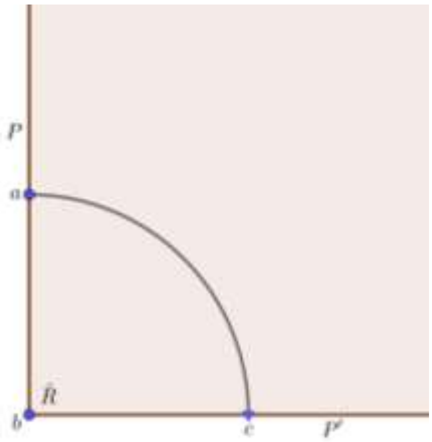
La siguiente figura muestra un ejemplo de un ángulo plano cóncavo o no convexo:



Según el arco que describe la semirrecta al barrer el plano, podemos clasificar los ángulos en:

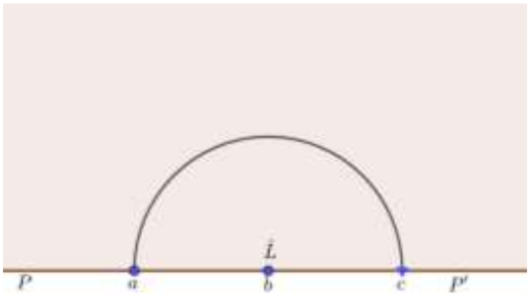
Ángulo Recto

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es la cuarta parte de una circunferencia y lo simbolizaremos $\hat{R}$.



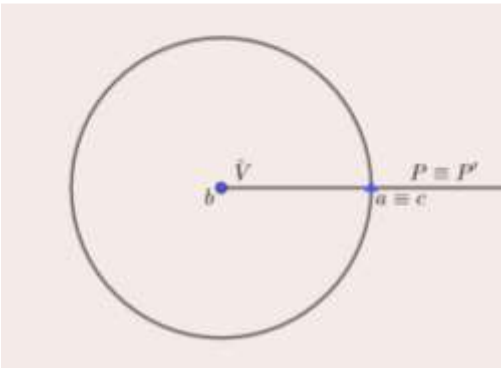
Ángulo llano

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es la mitad de una circunferencia y lo simbolizaremos $\hat{L}$.



Ángulo de una vuelta

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es una circunferencia y lo simbolizaremos $\hat{V}$.



Ángulo nulo

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es un arco nulo y lo simbolizaremos $\hat{N}$.

EL ÁNGULO Y SU MEDIDA

Cada vez que medimos un ángulo utilizamos una unidad de medida conveniente. Esta unidad es elegida dentro de las unidades convencionales dando lugar a diversos sistemas de medición de ángulos.
Nos ocuparemos de dos de ellos:

- Sistema sexagesimal
- Sistema Circular o del Radián

➔ Sistema sexagesimal

El sistema sexagesimal de medición de ángulos data de la antigua Babilonia, donde los habitantes consideraron que el año tenía 360 días y tomaron como unidad de medida angular el recorrido diario del Sol alrededor de la Tierra y, por lo tanto, adoptaron como unidad de medida un submúltiplo del ángulo de una vuelta, más exactamente como:

$$\frac{1}{360}\ de\ \hat{V}$$

Así obtenemos el ángulo llamado de un grado sexagesimal cuya simbología es: 1°
De esta definición resultará, para los ángulos clasificados anteriormente:

- $\hat{V} = 360 \cdot 1° = 360°$
- $\hat{L} = 180 \cdot 1° = 180°$
- $\hat{R} = 90 \cdot 1° = 90°$
- $\hat{N} = 0 \cdot 1° = 0°$

Algunos submúltiplos del grado reciben nombres particulares, ellos son:

$$1\ minuto = 1' = \frac{1}{60} \cdot 1°$$

$$1\ segundo = 1'' = \frac{1}{60} \cdot 1' = \frac{1}{3600} \cdot 1°$$

Actividades

24) Calcula el valor de $\hat{\alpha}$ y exprésalo en grados, minutos y segundos:

a) $\hat{\alpha} = 2°8' + 17°35'$

b) $\frac{5\hat{\alpha} + 8°3'}{2} = 25°4'$

> **Recuerda:**
> Dos ángulos son **complementarios** cuando la suma de sus medidas es la medida de un ángulo recto.
> Dos ángulos son **suplementarios** cuando la suma de sus medidas es la medida de un ángulo llano.

25) Determina el valor del ángulo cuyo doble es igual a su complementario disminuido en $20°$.

26) La suma entre el triple de la medida de un ángulo y la medida del suplemento del mismo es $210°$. Hallar la medida del mismo

27) El suplemento de un ángulo $\hat{\beta}$ es de $162°\,20''$. ¿Cuál es la medida de la suma entre la medida del ángulo $\hat{\beta}$ y la de su complementario?

28) Si el ángulo $\hat{\alpha}$ mide 24° 10', calcula el triple de $\hat{\beta}$ siendo $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\hat{\alpha} + 30°10'$.

29) Si $\hat{\alpha} = 179°\,59'\,59''$ y $\hat{\beta} = 30°\,10'\,20''$; calcula:

a) El complemento de $\hat{\beta}$ más el suplemento de $\hat{\alpha}$.

b) La mitad de $\hat{\alpha}$ menos la quinta parte de $\hat{\beta}$.

➔ Sistema Circular o del Radián

En este sistema de medición de ángulos, la unidad de medida la denominaremos **radián** y la simbolizaremos **rad.**

Definiremos al Radián de la siguiente manera:

> Dada una circunferencia de centro o y radio r, el ángulo central $\hat{\alpha}$ es de un radián cuando la medida del arco correspondiente a dicho ángulo es igual a la medida del radio de la circunferencia.

Para el ángulo de una vuelta $(\hat{V})$ resulta:

$$\hat{V} = 360° = 2\pi\, rad$$

Actividades

30) Expresar en radianes los siguientes ángulos dados en el sistema sexagesimal:

a) $180°$	c) $45°$	e) $36°\ 20'\ 12''$
b) $90°$	d) $30°$	f) $323°18'17''$

31) Expresa en el sistema sexagesimal

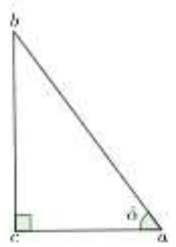
a) $\frac{\pi}{3}$	c) $5\frac{\pi}{4}$	e) $1{,}389$
b) $\frac{\pi}{5}$	d) $\frac{5}{3}\pi$	f) $0{,}0023$

Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

La Trigonometría es la rama de la matemática que analiza las relaciones entre la medida de los ángulos y lados de un triángulo.

En particular nos ocuparemos de la **resolución de triángulos rectángulos**.

En primer lugar, es conveniente darles nombres a algunos elementos que componen el triángulo rectángulo.



Llamamos:

- Cateto adyacente con referencia al $\hat{a}$ del $\overset{\triangle}{abc}$ al segmento $\overline{ac}$.
- Cateto opuesto con referencia al $\hat{a}$ del $\overset{\triangle}{abc}$ al segmento $\overline{bc}$.
- Hipotenusa del triángulo $\overset{\triangle}{abc}$ al segmento $\overline{ac}$. Es el lado que se opone al ángulo recto.

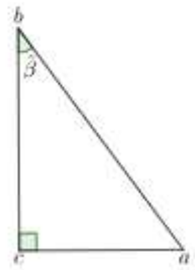
Actividad

32) Completa:

a) Cateto opuesto a $\hat{\beta}$: ………………….

b) Cateto adyacente a $\hat{\beta}$ ………………….

c) Hipotenusa: ………………….



Definición de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Consideremos un ángulo $\hat{a}$ agudo y $\overset{\triangle}{ab_1c_1}$; $\overset{\triangle}{ab_2c_2}$; $\overset{\triangle}{ab_3c_3}$ algunos de los triángulos rectángulos que podemos construir según indicamos en la figura, con $\hat{a}$ ángulo común y b_1; b_2; b_3; c_1; c_2; c_3 puntos pertenecientes a los lados de dicho ángulo.

Por tener dos ángulos respectivamente congruentes, resulta:

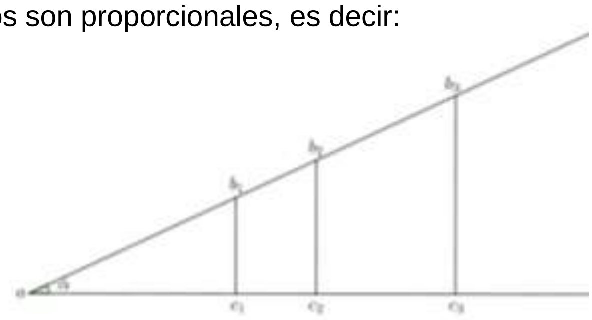
$$\overset{\triangle}{ab_1c_1} \sim \overset{\triangle}{ab_2c_2} \sim \overset{\triangle}{ab_3c_3}$$

Entonces, las medidas de sus lados son proporcionales, es decir:

$$\frac{b_1c_1}{ab_1} = \frac{b_2c_2}{ab_2} = \frac{b_3c_3}{ab_3} = k_1$$

$$\frac{ac_1}{ab_1} = \frac{ac_2}{ab_2} = \frac{ac_3}{ab_3} = k_2$$

$$\frac{b_1c_1}{ac_1} = \frac{b_2c_2}{ac_2} = \frac{b_3c_3}{ac_3} = k_3$$



Cada una de esta serie de razones iguales, que son independientes de los triángulos considerados y que sólo varían si varía $\hat{a}$, reciben nombres especiales. Así:

- $k_1 = \frac{medida\ del\ cateto\ opuesto\ a\ \hat{a}}{medida\ de\ la\ hipotenusa} = seno\ de\ \hat{a} = sen\hat{a}$
- $k_2 = \frac{medida\ del\ cateto\ adyacente\ a\ \hat{a}}{medida\ de\ la\ hipotenusa} = coseno\ de\ \hat{a} = cos\hat{a}$
- $k_3 = \frac{medida\ del\ cateto\ opuesto\ a\ \hat{a}}{medida\ del\ cateto\ adyacente\ a\ \hat{a}} = tangente\ de\ \hat{a} = tg\hat{a} = tan\hat{a}$

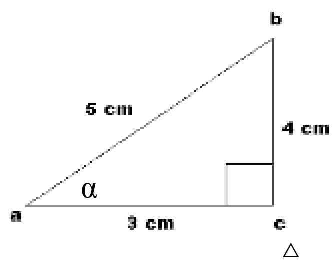
A estas expresiones se las denomina **RAZONES TRIGONOMÉTRICAS** de $\hat{a}$.

Resolución de triángulos rectángulos

Esta actividad consiste en determinar las medidas de todos sus elementos, entendiéndose por ellos a sus lados y ángulos interiores.
Se debe tener en cuenta que las expresiones a emplear deberán seleccionarse según el caso a resolver.

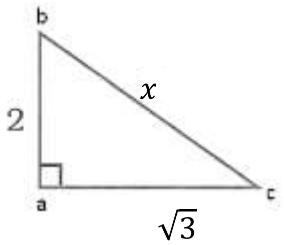
Actividades

33) De acuerdo a los datos de la figura, determina los valores de $sen\hat{a}$; $cos\hat{a}$ y $tan\hat{a}$

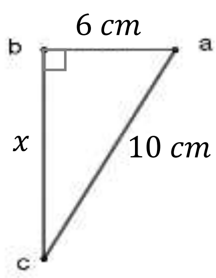


34) Calcula "x" y las razones trigonométricas de los ángulos agudos del $\overset{\triangle}{abc}$.

a)



b)



Observación:
Para obtener el ángulo α, dada una razón trigonométrica, utilizamos las funciones inversas del $sen\alpha$; $cos\alpha$ y $tan\alpha$, que aparecen en la calculadora como sin^{-1}; cos^{-1} y tan^{-1}.
Ejemplo:
Sabiendo que $sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, para obtener la medida del ángulo α con la calculadora realizaremos los siguientes pasos:

1º) Verificar que la calculadora está en el modo radian o sexagesimal. Esto dependerá de cómo nos interese obtener el ángulo, si en grados sexagesimales o en radianes.
2º) Utilizar las teclas $shift + sen$, y aparecerá en el visor sen^{-1}.
3º) Por último, al lado de sen^{-1}, escribiremos $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y usaremos la tecla $=$.

En el visor, aparecerán alguna de estas dos opciones para la medida del ángulo α.

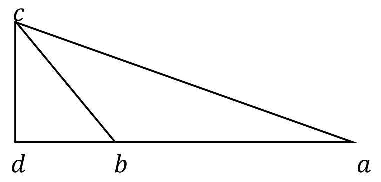
- $\alpha = 60^{\circ}$ si está en sistema sexagesimal.
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$ si está en sistema radian.

Actividades

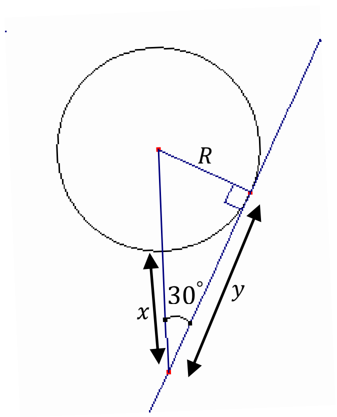
35) Halla la superficie de un rectángulo cuya base es de $16m$ y la diagonal forma con ella un ángulo de $34^{\circ}30'16''$.

36) Calcula los ángulos interiores y la superficie de un triángulo isósceles cuya base mide $40cm$ y cada lado congruente $60cm$.

37) En la figura, $\hat{a} = 20^{\circ}33'15''$; $\widehat{cbd} = 50^{\circ}34'27''$; $cb = 12{,}5cm$. Calcula la medida de ab, sabiendo que $\overline{ad}$ es perpendicular a $\overline{cd}$.



38) Calcula "x" e "y" en la siguiente figura teniendo en cuenta que el radio de la circunferencia es de $2cm$.



EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En Matemática una misma idea puede expresarse empleando diversas formas del lenguaje, coloquial, simbólico o algebraico, gráfico, etc.

Por ejemplo:

lenguaje coloquial	lenguaje simbólico
La suma del opuesto de un número y tres cuartos del mismo.	$-x+\frac{3}{4}x$

Lo que escribiste es una **expresión algebraica en x**, donde la letra x, llamada **variable** de la expresión, representa a **un número cualquiera.**

Observemos, en la tabla, que el **valor numérico** de la expresión $-x+\frac{3}{4}x$, depende del valor de la variable.

Valor de x	Valor numérico de la expresión algebraica $-x+\frac{3}{4}x$
0	$-0+\frac{3}{4}\cdot 0=0$
-1	$-(-1)+\frac{3}{4}\cdot(-1)=\frac{1}{4}$
$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}+\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}$

Actividades

39) Completa de modo que la igualdad resulte cierta:

a) $(4ax).\left(\frac{3}{5}abx\right)=$.......................

b) $\frac{1}{4}a^2b^2c=(bc).(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

c) $(-5mp).(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)=\frac{1}{3}mp^2$

d) $3x^2ya=\left(\frac{7}{3}xy\right).(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

40) Transforma los productos en sumas indicadas.

a) $(-4)a\left(2bc+\frac{1}{8}ab\right)$

b) $(-3)ax\left[\left(-\frac{2}{3}\right)x+(-1)ax\right]$

c) $(-2z)\cdot(zb-x)$

d) $[a+(-3)bc].[(-2)b+(-3)]$

e) $(1-2b)\cdot(-b+4)$

f) $(1-x)\cdot(x+2)$

g) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)p\right].[3+(-2)p].[p^2q+(-3)]$

h) $3x\cdot(1-x)\cdot(2+x)$

PRODUCTOS ESPECIALES

➔ Cuadrado de un Binomio

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\underbrace{\mathbf{a}^2+\mathbf{2ab}+\mathbf{b}^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

Cuadrados perfectos

El cuadrado de un número natural es otro número natural llamado "cuadrado perfecto". Así, por ejemplo, son cuadrados perfectos: $16 = 4^2$; $25 = 5^2$; $144 = 12^2$

➔ Cubo de un Binomio

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^3=(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\underbrace{\mathbf{a}^3+\mathbf{3a}^2\mathbf{b}+\mathbf{3ab}^2+\mathbf{b}^3}_{\text{Cuatrinomio cubo perfecto}}$$

➔ Producto de la suma por la diferencia

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\underbrace{\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}}$$

<u>Actividad</u>

41) Obtiene la mínima expresión:

a) $(2x-1)^2-\left(-\frac{1}{4x}\right)^{-1}=$

b) $2m\left(\frac{9}{2}m-1\right)+(-2)^{-2}-\left(3m+\frac{1}{2}\right)^2=$

c) $\left(\frac{1}{a+b}\right)^{-2}-(a-b).(a+b)=$

d) $(2x-1)\cdot(2x+1)-2x\cdot(-3x)=$

e) $(5-3xy)^3-x^2\left(y^2-xy^3\right)=$

f) $(1-2b)^2-(-b+4)^3=$

FACTOREO

Recordemos que factorear es transformar una suma algebraica en multiplicación. Para hacerlo existen distintos casos:

➔ Factor común

Ejemplos:

- $a^2b + a^2 + a^3 = \boldsymbol{a^2} \cdot b + \boldsymbol{a^2} \cdot 1 + \boldsymbol{a^2} \cdot a = \boldsymbol{a^2} \cdot (b + 1 + a)$
- $(\boldsymbol{a} - \sqrt{\boldsymbol{2}}) \cdot b + (\boldsymbol{a} - \sqrt{\boldsymbol{2}}) \cdot b^2 + (\boldsymbol{a} - \sqrt{\boldsymbol{2}}) \cdot 2 = (\boldsymbol{a} - \sqrt{\boldsymbol{2}}) \cdot (b + b^2 + 2)$

Actividad

42) Extrae todos los factores comunes que tengan las siguientes expresiones:

a) $25h^3m^2 - 10h^5m^3y =$

b) $6a^4b^3 - 4a^5c - 12a^3y^2 =$

c) $5(a+3) - 2x(a+3) + x^2(a+3) =$

d) $2m(x+y) + 4m^2(x+y) =$

➔ Factor común por grupos

Ejemplos:

- $x^2 + 2xy + x + 2y = (x^2 + x) + (2xy + 2y) = x(x+1) + 2y(x+1) = (x+1) \cdot (x+2y)$
- $4x - 2xy + 3y - 6 = (4x - 2xy) + (3y - 6) = 2x(2-y) + 3(y-2) =$

$$= 2x(2-y) - 3(2-y) = (2-y) \cdot (2x-3)$$

Actividad

43) Extrae factor común en grupos:

a) $2ax + 3by + 2ay + 3bx =$

b) $3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 =$

c) $5hm^2 + 15h^3 + m^2 + 3h^2 =$

d) $x^2 + x - xy - y =$

➔ Trinomio cuadrado perfecto

Ejemplos:

- $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = (x+4)^2$
- $a^2 - 4ab^2 + 4b^4 = a^2 - 2 \cdot a \cdot (2b^2) + (2b^2)^2 = [a + (-2)b^2]^2 = (a - 2b^2)^2$

Actividades

44) Cuando sea posible, expresa los siguientes trinomios como cuadrados de binomios:

a) $9h^2 + 12hy + 4y^2 =$

b) $x^2y^2 - 4xy + 4 =$

c) $x^2 + 5x + 25 =$

d) $a^{10} - a^5 + \frac{1}{4} =$

45) Completa, como muestra el ejemplo, de modo tal que los trinomios sean cuadrados perfectos y escríbelos como cuadrado de un binomio:

a) $x^2 + \ldots\ldots\ldots + 4 =$

b) $25b^2 - 10ab + \ldots\ldots\ldots =$

c) $\ldots\ldots\ldots + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} =$

d) $\ldots\ldots\ldots - 2h + \ldots\ldots\ldots =$

e) $a^4 + \ldots\ldots\ldots + \frac{36}{121} =$

Ejemplo

$$\underbrace{4x^2}_{(2x)^2} + \underbrace{\ldots\ldots}_{2\cdot 2x\cdot 3} + \underbrace{9}_{3^2} =$$
$$= 4x^2 + 12x + 9 =$$
$$= (2x+3)^2$$

Observación:

Lo que hemos realizado en el problema anterior, es un procedimiento conocido con el nombre "completar cuadrados". El mismo consiste en lograr escribir un trinomio cuadrado perfecto como cuadrado de un binomio, utilizando la expresión $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

➔ **Cuatrinomio cubo perfecto**

Ejemplos:

- $x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot \frac{1}{3} + 3\cdot x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{3}\right)^3$
- $-n^3 + 6n^2 - 12n + 8 = (-n)^3 + 3\cdot(-n)^2 \cdot 2 + 3\cdot(-n)\cdot 2^2 + 2^3 = (-n+2)^3$

Actividad

46) Cuando sea posible, expresa los siguientes cuatrinomios como cubos de binomios:

a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 =$

b) $27a^3 - 27a^2y + 9ay^2 - y^3 =$

c) $m^3 + 3m^2 - 3m + 1 =$

d) $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{1}{6}x^2y + \frac{1}{4}xy^2 =$

➔ **Diferencia de cuadrados**

Ejemplos:

- $4x^2 - y^2 = (2x)^2 - y^2 = (2x-y)\cdot(2x+y)$
- $(2a-1)^2 - b^2 = [(2a-1)-b]\cdot[(2a-1)+b] = (2a-1-b)\cdot(2a-1+b)$

Actividades

47) Factorea las siguientes diferencias de cuadrados:

a) $9x^2 - 25y^2 =$

b) $81m^{12} - 16y^6 =$

c) $\frac{36}{49}x^2y^4z^6 - 25 =$

d) $(w+1)^2 - 1 =$

48) Factorea, utilizando alguno de los casos vistos.

a) $60x^2y-30xy^2+15y^3=$

b) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3=$

c) $4x^6+\frac{1}{16}+x^3=$

d) $x^3-\frac{9}{4}x^2-\frac{27}{64}+\frac{27}{16}x=$

e) $2xy^2a+mb+2xy^2b+ma=$

f) $\frac{36}{81}x^2y^2-100x^2=$

➔ Factoreo combinado

Ejemplos:

- $2x^4-162y^4\underset{(1)}{=}2\cdot\left(x^4-81y^4\right)\underset{(2)}{=}2\cdot\left(x^2-9y^2\right)\cdot\left(x^2+9y^2\right)\underset{(2)}{=}$
  $\underset{(2)}{=}2\cdot(x-3y)\cdot(x+3y)\cdot\left(x^2+9y^2\right)$

- $-\frac{1}{16}-x^4+\frac{1}{2}x^2\underset{(1)}{=}(-1)\cdot\left(\frac{1}{16}+x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\underset{(3)}{=}(-1)\cdot\left(\frac{1}{4}-x^2\right)^2\underset{(2)}{=}$
  $\underset{(2)}{=}(-1)\cdot\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]^2=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}+x\right)^2$

(1) Factor común
(2) Diferencia de cuadrados
(3) Trinomio cuadrado perfecto

Actividad

49) Factorea todo lo posible:

a) $3x^2-12xy+12y^2=$

b) $6a^3b^3-24ab=$

c) $ax^2-a+x^2-1=$

d) $16x^3-24x^2y+12xy^2-2y^3=$

e) $4a^4-8a^2+4=$

f) $2a^3-a^2+2-4a=$

g) $3x^9y^7-12x^7y^9=$

h) $a^3-a^2-a+1=$

i) $5x^2-10xy+5y^2=$

j) $81x^4-16=$

k) $36a^2x+24abx+4b^2x=$

l) $\frac{1}{2}a^3x^2-\frac{1}{8}a^3y^2-\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{8}ay^2=$

m) $9x^3-9x^2y-6x^2+6xy+x-y=$

n) $2x^7y-12x^5y^2+24x^3y^3-16xy^4=$

ECUACIONES

Comenzaremos recordando concepto de "**ecuación**" que se ha trabajado en diferentes cursos de Matemática: "**Una ecuación es una igualdad en la que figura, al menos, una incógnita".**
Ejemplos de ecuaciones con una incógnita:

- $x^2 - 4 = 0$
- $3x - 1 = 0$
- $2(x+1) = 2x + 2$

Resolver una ecuación es hallar el o los valores numéricos de la incógnita de modo tal que se verifique la igualdad. El conjunto de números que satisfacen una ecuación se denomina "**conjunto solución**".

Ejemplo:
La solución de la ecuación: $-2x - 1 = 5$ es $x = -3$, pues es el único valor de la variable tal que $-2 \cdot (-3) - 1 = 6 - 1 = 5$, entonces, el conjunto solución es $S = \{-3\}$.

Para resolver ecuaciones se emplea generalmente un método que está basado en la obtención de ecuaciones equivalentes a través de la aplicación de sucesivas transformaciones.

Definición:
"Dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución".

De esta forma, la ecuación inicial se transforma en ecuaciones equivalentes hasta lograr una ecuación en la que en forma inmediata se pueda obtener la solución.

Para ello es preciso tener presente las siguientes propiedades:

- Sumando a ambos miembros de una ecuación una misma "expresión" se obtiene una ecuación equivalente a la dada.
- Multiplicando a ambos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

Ejemplo:

$$\frac{x+7}{6} + \frac{2x-8}{-2} = -4$$

Realizamos la suma de fracciones

$$\frac{-10x+62}{12} = -4$$

Al multiplicar a ambos miembros de la ecuación por 12 se obtiene una ecuación equivalente.

$$-10x + 62 = -48$$

Al sumar a ambos miembros de la ecuación (-62) se obtiene una ecuación equivalente.

$$-10x = -110$$

Al dividir a ambos miembros de la ecuación por (-10) se obtiene una ecuación equivalente.

$$x = 11$$

Como $x = 11$ es la solución de la ecuación planteada pues dicho valor la verifica por lo tanto: $S = \{11\}$.
Hasta el momento te has enfrentado con situaciones en las que debías encontrar el valor de una incógnita de modo tal que verifiquen una igualdad.
Pero, no siempre, las ecuaciones se presentan del mismo tipo de las que has trabajado.

Actividad

50) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $-2.\left(x+\frac{3}{2}\right)-(-1)=4-\frac{4}{3}x$

b) $\frac{5}{2}x-1=\frac{1}{4}(10x-2)-\frac{1}{2}$

c) $3x-2=\frac{1}{2}(6x-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)$

En la segunda ecuación; a través de las distintas transformaciones que realizas utilizando propiedades, llegarás seguramente a la expresión:

$$0.x = 0$$

Esto significa que x puede asumir cualquier número real, es decir, la ecuación se verifica $\forall x \in R$. Por lo tanto: $S = R$
En cambio, en la tercera ecuación; te encontrarás con una situación de la forma:

$$0.x=\frac{1}{2}$$

En este caso la incógnita no puede asumir ningún número real, es decir $\nexists x \in R$, que verifique la igualdad. En este caso $S = \emptyset$.

Resumiendo:

En toda expresión del tipo $a.x = b$, al querer encontrar el valor de x que verifique la igualdad puede suceder:

- Si $a \neq 0$, será $x=\frac{b}{a}$, y en este caso decimos que la ecuación es **compatible con solución única**, siendo $S=\left\{\frac{b}{a}\right\}$.
- Si $a = 0$, o sea $0x = b$, según el valor de b puede ser que:
  - Si $b = 0$, la ecuación queda $0x = 0$, por lo que x puede tomar cualquier valor. La ecuación recibe el nombre de **ecuación compatible con infinitas soluciones o indeterminada** y el conjunto solución es $S = R$.
  - Si $b \neq 0$, la ecuación queda $0x = b$, y no existe ningún valor de x que verifique la igualdad.
    La ecuación recibe el nombre de **ecuación incompatible** y el conjunto solución es $S = \emptyset$.

Actividades

51) Resuelve las siguientes ecuaciones, clasifícalas y escribe el conjunto solución:

a) $(3x-2)-(x+3)=8$

b) $2(x-3)-3(4x-5)=17-8x$

c) $\frac{1}{2}x-3\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)=\sqrt[3]{-27}+x$

d) $\frac{3}{2}x+(-2)=\frac{1}{4}(6x-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)$

e) $\frac{x-2}{3}-\frac{1-2x}{2}=\frac{4x-1}{3}$

f) $2.(x+2)=3x+\left(-\frac{2}{3}\right).(x+1)+\left(-\frac{1}{3}x\right)$

g) $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}=2+\frac{3x-1}{15}$

h) $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}=4$

i) $\frac{\frac{1}{2}x-5}{7}-\frac{x-1}{2}=\frac{2-3x}{7}$

j) $(-3).\left(\frac{x-3}{27}\right)+0,\widehat{1}x=\frac{1}{3}$

k) $2x+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.(4x+3)+(-4x)$

l) $\left(-\frac{1}{2}\right).(0,4x+3)=-\left(1,5+\frac{1}{5}x\right)$

52) Aplicando la condición de anulación del producto $(a.b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0)$ encuentra, en cada ecuación, el conjunto solución:

a) $x^2(2x-1).(-x-\sqrt{2})=0$

b) $(x^3-8).(x+2)=0$

c) $(x^2+\sqrt{2}).x=0$

d) $\left(\frac{1}{x}-1\right).x^3=0$

e) $[x-(4x-1)].(x-5).x=0$

f) $\frac{1}{x}(x^2+1)=0$

➔ **Ecuaciones con valor absoluto:**

Ejemplo:

$|x-5|=10$ por definición de valor absoluto resulta que:

$x-5=10$ o $x-5=-10$

$x=15$ o $x=-5$

Actividad

53) Calcula el o los valores de x en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $|3x-2|=5$

b) $|1-4x|=4$

c) $\frac{1}{3}\cdot\left|\frac{5}{3}-\frac{1}{2}x\right|+1=\frac{5}{3}$

d) $\left|\left(-\frac{2}{5}\right)+x\right|=0$

e) $\left|x-\frac{1}{3}\right|=(-9)$

f) $\left|-2x+\frac{3}{4}\right|+2=\frac{5}{2}$

➔ Ecuaciones exponenciales:

Ejemplo:

$$\frac{9^x.27}{\frac{1}{3}} = 3$$

Escribimos todos los números como potencias de la misma base

$$\frac{\left(3^2\right)^x.3^3}{3^{-1}} = 3^1$$

Aplicamos las propiedades que correspondan hasta lograr que en cada miembro quede una sola potencia

$$3^{2x+3-(-1)} = 3^1$$

Igualamos los exponentes

$$2x+3-(-1) = 1$$

$$2x = 1-4 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \Rightarrow S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

Actividades

54) Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

d) $2^x.8 = \frac{1}{16}$

c) $3^x = \left(\frac{1}{9}\right)^x$

e) $4^{2x-1} = \frac{1}{16}$

e) $\frac{9}{3^{2x}} = 3^{-x}$

d) $2^{x+1} = \sqrt{2}$

f) $\frac{3^{2x+1}}{3^{x-4}} = 81$

55) Resuelve los siguientes problemas:

a) De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

b) La semisuma de un número y su consecutivo, aumentada en la tercera parte de dicho número da como resultado la sexta parte de treinta y cinco. ¿Cuál es el número?

c) En una fábrica se produce un producto compuesto de dos elementos que llamaremos A y B. El elemento A se produce a razón de 4,5 unidades por hora y el elemento B a razón de 8 unidades por hora. Al comenzar la fabricación hay una existencia de 90 unidades del producto A y 20 de producto B. En un instante dado, se inicia simultáneamente la producción de los elementos. Determina después de cuánto tiempo las cantidades de los elementos A y B son iguales y qué cantidad de unidades del producto final se podrán armar.

➔ Ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, son ecuaciones de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, donde $A \in R - \{0\}$, $b \in R$ y $c \in R$.
Puede deducirse la expresión:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que nos permite hallar las dos soluciones de la misma, o sea:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

$$x_1 = \frac{10+\sqrt{(-10)^2-4\cdot2\cdot12}}{2\cdot2} = \frac{10+2}{4} = 3 \text{ y } x_2 = \frac{10-\sqrt{(-10)^2-4\cdot2\cdot12}}{2\cdot2} = \frac{10-2}{4} = 2$$

Observemos que ambos valores verifican la ecuación:

$$* \ 2\cdot3^2 - 10\cdot3 + 12 = 18 - 30 + 12 = 0$$

$$* \ 2\cdot2^2 - 10\cdot2 + 12 = 8 - 20 + 12 = 0$$

<u>Actividad</u>

56) Encuentra el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $-x^2 + 5x - 6 = 0$

b) $4x^2 - 17x = -15$

c) $2 + 6\sqrt{2}y + 9y^2 = 0$

d) $p^2 + p + 1 = 0$

Por lo que ya sabemos, la existencia de la expresión $\sqrt{b^2 - 4ac}$ dependerá del radicando, que convenimos en llamar **discriminante** y escribimos $\Delta = b^2 - 4ac$.

Analizando el discriminante resulta:

- $\Delta > 0$ existirá $\sqrt{\Delta}$ y en consecuencia existen **dos soluciones distintas** para la ecuación.
- $\Delta = 0$,es $\sqrt{0} = 0$ y en consecuencia las expresiones que dan x_1 **y** x_2 **resultan iguales**
- $\Delta < 0$, no existe $\sqrt{\Delta}$ en R, y en consecuencia **no habrá soluciones reales** de la ecuación.

<u>Propiedades de las soluciones de una ecuación cuadrática</u>

Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, entonces:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Forma factorizada de una expresión de segundo grado

Toda expresión de segundo grado, se puede escribir en forma factorizada, de la siguiente manera, siendo x_1 y x_2 sus raíces:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Estas propiedades resultan altamente significativas en el proceso inverso, es decir, si conocemos las soluciones de una ecuación de segundo grado podemos encontrar una ecuación de las que proceden.

Actividades

57) Determina el número real k de modo que la ecuación:
   a) $4x^2 + kx + 6 = 0$ tenga una raíz igual a 2
   b) $5x^2 + 8x + k = 0$ tenga raíces cuyo producto sea $\frac{1}{3}$
   c) $4x^2 + 20x + k = 0$ tenga raíces iguales
   d) $2x^2 + (4-k)x - 17 = 0$ cuyas raíces sean números opuestos
   e) $2x^2 - kx + 8 = 0$ no tenga solución en R

58) Encuentra las dimensiones de un rectángulo si su diagonal mide 17cm y su perímetro 46cm.

59) El producto de dos números es 736, si la diferencia entre ambos es 9. ¿Cuáles son estos números?

➔ Algunas ecuaciones fraccionarias

Para lograr resolver algunas ecuaciones fraccionarias en cuyo denominador se encuentra la incógnita, es conveniente, multiplicar a ambos lados de la igualdad, por el producto de los denominadores, como muestran los siguientes ejemplos:

Ejemplos:

a) $\frac{-2}{2x-1} = \frac{3}{x+6}$

Multiplicamos a ambos lados por $(2x-1)\cdot(x+6)$:

$$\frac{-2}{2x-1} = \frac{3}{x+6}$$

$$\cancel{(2x-1)}\cdot(x+6)\cdot\frac{-2}{\cancel{2x-1}} = \frac{3}{\cancel{x+6}}\cdot(2x-1)\cdot\cancel{(x+6)}$$

$$-2\cdot(x+6) = 3\cdot(2x-1)$$

$$-2x - 12 = 6x - 3$$

$$-12 + 3 = 6x + 2x$$

$$-9 = 8x$$

$$-\frac{9}{8} = x$$

Al multiplicar a ambos miembros de una ecuación por expresiones que impliquen la variable x no se está garantizando que la última ecuación sea equivalente a la original. Se debe verificar si el valor obtenido de la variable satisface o no la ecuación original. Es decir, sustituimos la variable x por el valor obtenido $\left(-\frac{9}{8}\right)$ en la ecuación original.

$$\frac{-2}{2x-1}=\frac{-2}{2\cdot\left(-\frac{9}{8}\right)-1}=\frac{-2}{-\frac{13}{4}}=\frac{8}{13}$$
$$\frac{3}{x+6}=\frac{3}{\left(-\frac{9}{8}\right)+6}=\frac{3}{\frac{39}{8}}=\frac{8}{13}$$

Por lo tanto, $x=-\frac{9}{8}$ es la solución de la ecuación dada y su conjunto solución es:

$$S=\left\{-\frac{9}{8}\right\}$$

b) $\frac{5}{x-4}-\frac{6}{x-3}=2$

Multiplicamos a ambos lados por $(x-4)\cdot(x-3)$, y luego trabajamos algebraicamente:

$$\frac{5}{x-4}-\frac{6}{x-3}=2$$

$$(x-4)\cdot(x-3)\cdot\left(\frac{5}{x-4}-\frac{6}{x-3}\right)=2\cdot(x-4)\cdot(x-3)$$

$$\cancel{(x-4)}\cdot(x-3)\cdot\frac{5}{\cancel{x-4}}-(x-4)\cdot\cancel{(x-3)}\cdot\frac{6}{\cancel{x-3}}=2\cdot(x-4)\cdot(x-3)$$

$$5\cdot(x-3)-6\cdot(x-4)=2\cdot(x-4)\cdot(x-3)$$

$$5x-15-6x+24=2\cdot(x^2-3x-4x+12)$$

$$-x+9=2x^2-14x+24$$

$$-x+9-2x^2+14x-24=0$$

$$-2x^2+13x-15=0$$

$$x_{1;2}=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot(-2)\cdot(-15)}}{2\cdot(-2)}=\frac{-13\pm7}{-4}$$

$$x_1=\frac{-13+7}{-4}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{-13-7}{-4}=\frac{-20}{-4}=5$$

Verificación:

- Para $x_1=\frac{3}{2}$:

$$\frac{5}{x-4}-\frac{6}{x-3}=\frac{5}{\frac{3}{2}-4}-\frac{6}{\frac{3}{2}-3}=\frac{5}{-\frac{5}{2}}-\frac{6}{-\frac{3}{2}}=-2+4=2 \quad \checkmark$$

- Para $x_1 = 5$:

$$\frac{5}{x-4}-\frac{6}{x-3}=\frac{5}{5-4}-\frac{6}{5-3}=5-3=2 \quad \checkmark$$

Por lo tanto, ambos valores son solución de la ecuación dada y su conjunto solución es:

$$S=\left\{\frac{3}{2};5\right\}$$

Actividades

60) Resuelve las ecuaciones fraccionarias indicadas en cada apartado

a) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{1}{x+1}$

b) $\frac{5}{x-5}+\frac{4}{x-5}=\frac{31}{7}$

c) $\frac{x-5}{5-x}=-1$

d) $x+1-\frac{2(x+1)^2}{x-1}=\frac{x^2+7}{x-1}$

61) Resuelve las siguientes ecuaciones y escribe el conjunto solución en cada caso.

a) $\frac{x}{x+2}-\frac{4}{x+1}=\frac{-2}{x+2}$

b) $(3^x-27)(2^x-4)=0$

c) $\sqrt{3^x+3^x+3^x}=9$

d) $(x-2)^2=4$

e) $\frac{1}{3^{|2x+1|}}=9^{-2}$

f) $\frac{x}{x-1}+x=1+\frac{1}{x-1}$

g) $(x-1)^{-3}=\frac{1}{27}$

h) $64.4^{1-x^2}=1$

INECUACIONES

Dados los números reales a y b, se tiene que: $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

➔ **Propiedades**

La suma y la multiplicación cumplen ciertas propiedades al relacionarse con las desigualdades (su validez puede ser probada). Tales propiedades son:

- Si a ambos miembros de una desigualdad les sumamos un mismo número se mantiene dicha desigualdad.
  En símbolos: $\forall a,b,c \in R : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

- Si a ambos miembros de una desigualdad los multiplicamos por un mismo número positivo se mantiene la desigualdad.
  En símbolos: $\forall a,b,c \in R : a \leq b,\ c > 0\ \Rightarrow a.c \leq b.c$

- Si a ambos miembros de una desigualdad los multiplicamos por un mismo número negativo cambia la desigualdad
  En símbolos: $\forall a,b,c \in R : a \leq b,\ c < 0\ \Rightarrow a.c \geq b.c$

Tales propiedades adquieren relevante importancia en el estudio y resolución de inecuaciones.

INECUACIONES LINEALES EN UNA INCÓGNITA

Llamaremos **inecuación lineal en una incógnita en la variable x,** a toda expresión equivalente a alguna de las siguiente:

$ax + b < 0$ ó $ax + b > 0$ ó $ax + b \leq 0$ ó $ax + b \geq 0$**,** siendo $a,b \in R$ y $a \neq 0$.

Ejemplos:

- $2x - 7 > 0$
- $-\frac{3}{2}x + 1 \leq 0$

Resolver una inecuación es encontrar el conjunto de todos los números reales que hace que la desigualdad sea verdadera, y el procedimiento para hacerlo, es análogo al utilizado al resolver una ecuación, pero teniendo en cuenta las tres propiedades enunciadas anteriormente.

Ejemplos:

a)

$$\frac{5}{2}x+\frac{2}{3}>-\frac{1}{6}$$

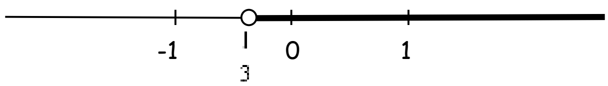
$$\frac{5}{2}x+\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)>-\frac{1}{6}+\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{5}{2}x>-\frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}x>-\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5}$$

$$x>-\frac{1}{3}$$

El conjunto solución es $S=\left\{x/x>-\frac{1}{3}\right\}$, siendo su representación en el eje real:



b)

$$-\frac{2}{3}+\frac{5}{9}x\leq x$$

$$-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{9}x\leq x+\frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{9}x\leq x+\frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{9}x+(-x)\leq x+(-x)+\frac{2}{3}$$

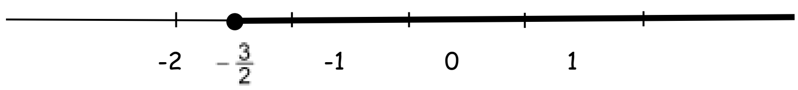
$$-\frac{4}{9}x\leq\frac{2}{3}$$

$$\left(-\frac{9}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)x\geq\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)$$

Observa que, al multiplicar a ambos miembros de la desigualdad por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte.

$$x\geq-\frac{3}{2}$$

Luego, el conjunto solución es $S=\left\{x/x\geq-\frac{3}{2}\right\}$, siendo su representación en el eje real:



Actividades

62) Representa en el eje real los siguientes conjuntos:

a) $\left\{ x / 4x - \frac{5}{2} \geq 0 \right\}$

c) $\left\{ y / \frac{4}{3} < y - \frac{1}{6} \right\}$

d) $\left\{ y / 6 + 2.(1 - y) \leq \frac{1}{2} y - \frac{1}{4} \right\}$

e) $\left\{ z / -\frac{1}{2} \leq -z < 3 \right\}$

f) $\left\{ x / \frac{1-2x}{4} < 2x \right\}$

63) ¿Para qué valores de x está definida cada una de las siguientes expresiones en R?

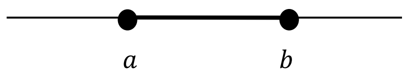
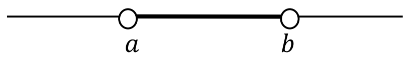
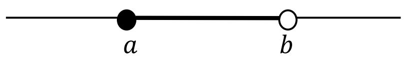
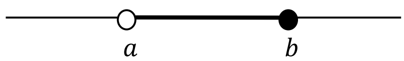
a) $\sqrt{\frac{1}{2}x - 3}$

b) $\sqrt{\frac{-2}{2-4x}}$

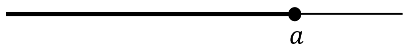
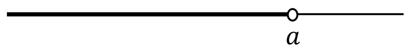
INTERVALOS

Los intervalos son subconjuntos de números reales definidos bajo ciertas condiciones.

➔ **Intervalos acotados**

Nombre	Notación	Conjunto	Representación gráfica
Intervalo cerrado	$[a; b]$	$\{x \ / \ a \leq x \leq b\}$	
Intervalo abierto	$(a; b)$	$\{x \ / \ a < x < b\}$	
Intervalos semiabiertos ó semicerrados	$[a; b)$	$\{x \ / \ a \leq x < b\}$	
	$(a; b]$	$\{x \ / \ a < x \leq b\}$	

➔ Intervalos no acotados

Nombre	Notación	Conjunto	Representación gráfica
Superiormente	$[a;+\infty)$	$\{x\ /\ x \geq a\}$	
	$(a;+\infty)$	$\{x\ /\ x > a\}$	
Inferiormente	$(-\infty;a]$	$\{x/x \leq a\}$	
	$(-\infty;a)$	$\{x/x < a\}$	

Actividades

64) Resuelve las siguientes inecuaciones, indica el conjunto solución utilizando la notación de intervalos, y represéntalo en el eje real:

a) $x - 4 \geq 6$

b) $x^2 + 3 \geq 0$

c) $6x + 2 < 3x$

d) $\frac{1}{2}x + 3 > -\frac{1}{2}x + 4$

e) $0x > 0$

f) $(x-4)\cdot(x+1) - 3 \geq (x-2)^2 + 7$

g) $\frac{5x+2}{5} < \frac{2(x-3)}{-4}$

h) $\frac{-2}{x-1} > 0$

i) $\frac{1-x}{2} + \frac{x}{3} \geq (-2)^{-1}$

j) $\frac{x-8}{-3} \geq x$

SISTEMAS DE ECUACIONES

Toda expresión de la forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde $x_1; x_2; \dots; x_n$ son **incógnitas** y $a_1; a_2; \dots; a_n; b$ son números reales llamados **coeficientes**, con al menos uno distinto de cero, se llama **ecuación lineal en las incógnitas** $x_1; x_2; \dots; x_n$.

Llamaremos **conjunto solución** al conjunto de todas las soluciones y resolver una ecuación es encontrar dicho conjunto.

A partir de estas ideas se obtiene el concepto de sistema de ecuaciones cualquiera sea el número de ecuaciones y el de incógnitas.

Si indicamos con m al número de ecuaciones y con n al número de incógnitas lo llamaremos **sistema $\boldsymbol{m \times n}$** y lo expresaremos así:

$$s)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \ (E_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \ (E_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ .a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \ (E_m) \end{cases}$$ donde:

los a_{ij}, llamados **coeficientes,** y los b_i, llamados **términos independientes**, son números reales dados. Los símbolos $x_1; x_2; \dots; x_n$ representan las n incógnitas del sistema.

Con $E_1; E_2; \dots; E_m$ simbolizamos cada una de las ecuaciones del sistema.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

➔ **Según sus términos independientes**

Un sistema $\boldsymbol{m \times n}$ se llama **homogéneo** si todos sus términos independientes son nulos; en caso contrario lo llamamos **no homogéneo**.

➔ **Según el número de soluciones**

Un sistema es **compatible** si tiene alguna solución y es **incompatible** si no tiene solución.

Un sistema compatible puede tener:

- **Única** solución, en cuyo caso se denomina **sistema compatible determinado.**
- **Infinitas** soluciones, en cuyo caso se denomina **sistema compatible indeterminado.**

Para la resolución de un sistema de ecuaciones es necesario tener en cuenta los siguientes conceptos:

- **Dos sistemas de ecuaciones lineales** de m ecuaciones con n incógnitas **son equivalentes** sí y sólo sí tienen **el mismo conjunto solución**.

- Si sobre un sistema de ecuaciones se efectúa cualquiera de las **operaciones elementales** que se detallan a continuación, se obtiene un sistema equivalente al dado (Teorema de equivalencia de sistemas):
  - Intercambiar dos ecuaciones.
    Ejemplo:
    $$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases} \text{ es equivalente a } \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$
  - Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
    Ejemplo:
    $$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases} \text{ es equivalente a } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$
  - Reemplazar una ecuación por la suma de ésta con otra multiplicada por un número distinto de cero.
    Ejemplo:
    $\begin{cases} 2x + y = 1 & E_1 \\ -x - y = 0 & E_2 \end{cases}$ es equivalente a $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$, donde E_2 se sustituye por $E_1 + 1 \cdot E_2$ en ambos lados de la igualdad, logrando que el coeficiente de la variable y sea 0 en la nueva ecuación, es decir:
    $$\overbrace{(2x + y)}^{E_1} + 1 \cdot \overbrace{(-x - y)}^{E_2} = \overbrace{1}^{E_1} + 1 \cdot \overbrace{0}^{E_2}$$
    $$2x + y - x - y = 1$$
    $$x + 0y = 1$$
    $$x = 1$$

Métodos para resolver sistemas lineales 2×2

En lo que sigue, mostraremos utilizando un ejemplo, cómo utilizar estas propiedades, para lograr resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2.
Resolver un sistema de ecuaciones, consiste en determinar el valor de las variables que hagan ciertas todas las ecuaciones que aparecen en el sistema simultáneamente.
Existen varios métodos para resolver sistemas, sólo veremos tres: eliminación de incógnitas, igualación y sustitución.

✓ **Eliminación de incógnitas**

Este método consiste en lograr obtener un sistema equivalente al dado pero escalonado.
Un sistema escalonado es aquel en el cual a partir de la segunda ecuación cada una empieza por lo menos con un coeficiente nulo más que la anterior.

Ejemplo:

Sea el sistema $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$, trataremos de construir un sistema equivalente de modo que una de las ecuaciones posea una incógnita menos, es decir, su coeficiente sea 0. Para ello, sustituiremos la segunda ecuación E_2, por el resultado de $2\cdot E_2+(-3)\cdot E_1$, quedando:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 & E_1 \\ 3x+2y=5 & E_2 \end{cases}$$

$$2\cdot\overbrace{(3x+2y)}^{E_2}+(-3)\cdot\overbrace{(2x+3y)}^{E_1}=2\cdot\overbrace{5}^{E_2}+(-3)\cdot\overbrace{5}^{E_1}$$

$$6x+4y-6x-9y=10-15$$

$$0x-5y=-5$$

$$-5y=-5$$

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -5y=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -5y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3\cdot 1=5 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=5 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Entonces, la solución de este sistema es el par ordenado $(1;1)$ y su conjunto solución será $S=\{(1;1)\}$.

✓ **Método de igualación:**

Este método consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones y luego igualarlas para calcular el valor de la otra variable.

Ejemplo:

Sea el sistema $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$, despejaremos, por ejemplo, la variable x, en ambas ecuaciones y luego igualaremos las expresiones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=5-3y \\ 3x=5-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-3y}{2} \\ x=\dfrac{5-2y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5-3y}{2}=\frac{5-2y}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(5-3y)=2(5-2y) \Leftrightarrow 15-9y=10-4y \Leftrightarrow -5y=-5 \Leftrightarrow y=1$$

Sustituimos en alguna de las dos ecuaciones de $\begin{cases} x=\frac{5-3y}{2} \\ x=\frac{5-2y}{3} \end{cases}$, la variable y por 1 y obtenemos el valor de la variable x.

$$x=\frac{5-3\overbrace{y}^{1}}{2}=\frac{5-3}{2}=1$$

Entonces, la solución de este sistema es el par ordenado $(1;1)$ y su conjunto solución será $S=\{(1;1)\}$.

✓ **Método de sustitución**

Este método consiste en despejar de una de las ecuaciones, una de las incógnitas y sustituirla (reemplazarla) en la otra ecuación.

Ejemplo:

Sea el sistema $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$, despejaremos, por ejemplo, la variable x, en la primer ecuación y luego sustituiremos la expresión obtenida, en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=5-3y \\ 3x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-3y}{2} \\ 3\cdot\dfrac{5-3y}{2}+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-3y}{2} \\ \dfrac{15-9y}{2}+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-3y}{2} \\ 15-9y+4y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-3y}{2} \\ -5y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-3y}{2} \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-3\overbrace{y}^{1}}{2} \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Entonces, la solución de este sistema es el par ordenado $(1;1)$ y su conjunto solución será $S=\{(1;1)\}$.

<u>Actividades</u>

65) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y escribe su conjunto solución:

a) $\begin{cases} 5x-3y=7 \\ 2x+7y=11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x-3y=24 \\ \dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=15 \\ x-\dfrac{2}{5}y=12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{y}{4}-\dfrac{x}{7}=\dfrac{29}{28} \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{7}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x+\dfrac{y}{5}=15 \\ 4y-\dfrac{31}{4}x=29 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{1}{4}x-y=7 \\ 3x-4y=8 \end{cases}$

66) En un campo hay gallinas y vacas. El total de animales es 60 y se cuentan 150 patas. ¿Cuántos animales hay de cada tipo en el corral?

67) Si al doble de un número se le suma el triple de otro, se obtiene 31. Pero si al triple del primero se le resta el doble del segundo, se obtiene uno. ¿Cuáles son los números?

68) Con los 34 billetes de $500 y $1000 que tenía ahorrado compré una camisa de $21.500. ¿Cuántos billetes de cada valor tenía?

69) Un hotel tiene habitaciones dobles y simples. Tiene en total 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

70) En abril, Hilda compró 15 lápices y 2 cuadernos y gastó $29500. Ese mismo mes Liliana compró 20 lápices y 3 cuadernos y gastó $40500. ¿Cuánto costó cada artículo?

AUTOEVALUACIÓN Nº 1

Determina si cada uno de los siguientes apartados es verdadero o falso. **Justifica**:

1) La ecuación $2.(x+2)=3x+\left(-\frac{2}{3}\right).(x+1)+\left(-\frac{1}{3}x\right)$ posee infinitas soluciones.

2) Las soluciones de la ecuación: $\left|2x-\frac{x-1}{3}\right|=1$ son $x=0$ y $x=-2$.

3) La expresión $\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$ es válida para cualquier valor de x.

4) $\sqrt{\frac{\sqrt{a}.a^{-3}}{\frac{1}{a}}}=a^{-\frac{3}{2}}$

5) Si $x^2-y^2 = 33.616$ y $x-y = 88$, resulta que $x+y = 382$.

6) El valor de (a.b) =2,5, entonces el valor de la expresión: $\frac{a^3b^5:(ab)^3}{a^2b^4}$ es $\frac{4}{25}$.

7) No posee solución la ecuación: $3^{x+1}.\left(\frac{1}{27}\right)^x=\frac{1}{3}$.

Apartado	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje	15	15	15	15	10	15	15

AUTOEVALUACIÓN Nº 2

1) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{-3x+10}{4}+x=2\left(\dfrac{1}{8}x-1\right)$

b) $2x.(x-1)\ =\ 4$

c) $-\dfrac{1}{2}.\left|1-x\right|+4=-2$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{4^{-x}}=2^{x+3}$

2) Determina los valores de a que hacen cierta la expresión:

$$\frac{2}{2a^2-10a+12}$$

3) Plantea y resuelve:

a) El producto de dos números consecutivos supera a su suma en 5 unidades. ¿Cuáles son esos números?

b) Calcula el perímetro y el valor de cada uno de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 30 cm y 25 cm.

4) Obtiene la mínima expresión:

$$\sqrt{2}(x-\sqrt{2})^2-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}-4x}\right)^{-1}$$

Problema	1	2	3	4
Puntaje	40	15	30	15

AUTOEVALUACIÓN Nº 3

1) Encuentra los elementos de los siguientes conjuntos y represéntalos en el eje real

a) $A=\left\{x/\frac{3}{4}|x|+\frac{1}{4}\geq 1\right\}$

b) $B=\{x/x\neq 2;|x|<4\}$

2) Calcular expresando casa apartado con el denominador racionalizado

a) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

c) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$

b) $\sqrt{8}-2\sqrt{32}+3\sqrt{128}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}.\sqrt{x-1}}$

3) Resolver hasta la mínima expresión:

$$\frac{\left(a^2\right)^5.\left(b^{-6}\right)^3\sqrt{b^9}}{\left(a^{-3}\right)^{-2}\left(b^4\right)^0}$$

4) El perímetro de un rombo es de 160 cm y uno de sus ángulos interiores es de 120º. Calcula la medida de sus diagonales.

5) ¿Verdadero o falso?. Justifica.

$$\frac{b^{-1}+c^{-1}}{(cb)^{-1}}:\frac{2}{(b+c)^{-1}}=\frac{1}{2}$$

Problema	1	2	3	4	5
Puntaje	20	35	15	15	15

AUTOEVALUACIÓN Nº 4

1) Encuentra la medida de la base y la altura de un triángulo isósceles cuyo ángulo opuesto a la base es de 65º y sus lados congruentes miden cada uno 415 cm.

2) Determina analíticamente que valor o valores debe asumir α en cada caso:

   a) $\dfrac{1}{\alpha^2+6\alpha+5}$ esté definido en R

   b) $\sqrt{(-\alpha+1)(\alpha+2)}$ esté definido en R

3) Resuelve hasta obtener la mínima expresión:

$$\frac{r\sqrt{b}}{b^{-1}}+r.b^{\frac{1}{2}}-3r\sqrt{b^3}$$

4) Un campo se ha sembrado la séptima parte de su superficie con trigo, la tercera parte de lo que queda con maíz y las 480 ha restantes con soja. ¿Cuántas ha tiene el campo?

5) ¿Para qué valores de x es cierta la expresión $\dfrac{3}{x^2-x}$?

Problema	1	2	3	4	5
Puntaje	20	20	20	20	20

A CONTINUACIÓN TE PROPONEMOS ALGUNOS EXÁMENES DE INGRESO (sólo resuelve los ejercicios de los temas desarrollados en el cursillo)

EXAMEN 2006 -DICIEMBRE

1) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{x}{x-1}$

b) $\frac{2^{x+1}}{8^{x}}=\frac{1}{16}$

2) Determina el valor de k, para el cual la ecuación: $3x^2+(5k-4)x+3=0$, posea raíces opuestas.

3) Determina los valores de a; b y c para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\frac{\sqrt[3]{9x^5}.x.y^{-1}}{3.\left(x^3y\right)^{-2}}=3^a.x^b.y^c$$

4) Indica qué valores debe asumir la variable en cada caso, para que las siguientes expresiones resulten ciertas. Luego representa cada solución en distintos ejes reales.

f) $\sqrt[3]{\frac{7}{2x^3-8x}}$

b) $\sqrt{\frac{2x-4}{-5}}$

5) Plantea y resuelve:

a) En un restaurante ofrecen un menú económico a \$800 y un menú ejecutivo a \$1500. Trece personas almorzaron juntas y gastaron \$14600. ¿Cuántos eligieron el menú económico y cuántos el ejecutivo?

b) La diagonal de un rectángulo es de 25cm. Determina, en radianes, el ángulo que ésta forma con la base, sabiendo que la altura del cuadrilátero es de 10cm.

Ejercicio	1	2	3	4	5
Puntaje	20	10	15	25	30

EXAMEN 2006 - FEBRERO

1) Expresa los siguientes enunciados algebraicamente y obtiene el valor para:

$$p=-\frac{3}{2} \quad ; \quad q=5$$

a) La suma del recíproco de p y el opuesto de q

b) Al cuadrado de p restarle el cuadrado de q

2) Resuelve la ecuación: $\frac{x^2}{x+1}-\frac{2}{2x+2}=1$

3) Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} y+x-3=0 \\ x-2(1-y)=2 \end{cases}$

4) Para que valores de x, está definida en el conjunto de los números reales cada una de las siguientes expresiones?

a) $\frac{1}{x^2-25x}$ b) $\sqrt{1-3x}$

5) Resuelve aplicando propiedades hasta la mínima expresión:

a) $\dfrac{\sqrt{\frac{x}{y}.x^{-1}}}{\sqrt[5]{\frac{1}{y}}}$ b) $\frac{1}{2}\sqrt{27}-\sqrt{12}+\frac{1}{5}\sqrt{3}$ c) $(a-\sqrt{3})^2-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a^2-2a\right)$

6) Plantea y resuelve:

a) Calcula en radianes la medida de los ángulos interiores del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 cm y 8 cm respectivamente.

b) Determina el radio de una circunferencia, sabiendo que el ángulo central de $\frac{\pi}{5}$ radianes subtiende un arco de 20 cm.

Problema	1	2	3	4	5	6
Puntaje	10	15	10	20	30	15

EXAMEN 2013

1) Plantea y resuelve:

Un pintor apoyó una escalera de 2,5 m contra la pared, de modo que el ángulo determinado por la escalera y el piso es de 65º. ¿a qué distancia de la pared está el pie de la escalera?

2) Determina el o los valores de la variable que hacen cierta cada una de las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{-3x-\frac{1}{2}(x-1)}$

b) $\frac{1}{25x^3-100x^2}$

3) Calcula x: $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=1$

4) ¿Verdadero o Falso?. Justifica.

a) $\left[\frac{\sqrt[5]{b^3}.\sqrt{b^{-1}}}{b^{-2}}\right]^{-2}=b^{-\frac{11}{5}}$

b) $|x|=5 \Rightarrow x=5$

5) Resuelve el sistema: $\begin{cases} 2x+y=1 \\ \frac{y+1}{x+3}=5 \end{cases}$

Problema	1	2	3	4	5
Puntaje	15	20	20	20	25